নন্দলাল মাইতি

গ্রীক গণিতের সংক্ষিপ্ত ইতিবৃত্ত



ফার্মা কেএলএম প্রাঃ লিঃ

গ্রীকসভ্যতা দ্বিতীয় নগর বিপ্লবের অন্তর্গত বলে এই সভ্যতার অনেক উপাদান পূর্ববর্তী সভ্যতা থেকে গৃহীত হয়েছে সত্য, কিন্তু এর বৈশিষ্ট্য ও স্বকীয়তা কম নয়। ইউরোপীয় রেনেসাঁসের সময় গ্রীক সাহিত্য ও বিজ্ঞান নতুন আলোকে পঠিত ও ব্যাখ্যাত হতে থাকে, এবং ইউরোপ নব উদ্দীপনা ও প্রেরণা লাভ করে সে-যুগের আর্থ-সামাজিক প্রেক্ষিতে গ্রীক জ্ঞান-বিজ্ঞান বিচার-বিশ্লেষণের মাধ্যমে পরিপুষ্টি লাভ করে। অতীত জ্ঞান-বিজ্ঞানের প্রত্যক্ষ বা পরোক্ষ অনুশীলনের বিস্ময়কর ফল আধুনিক ইউরোপীয় সভ্যতা বললে বোধ হয় অত্যুক্তি হয় না।

বাংলা ভাষায় জ্ঞান-বিজ্ঞান চর্চা প্রধানত পাঠ্যপুস্তকের মধ্য দিয়ে শুরু হয়েছিল উনবিংশ শতাব্দীর দ্বিতীয় দশকে। অক্ষয়কুমারের পর পাঠ্যপুস্তক বহির্ভূত বিজ্ঞান, গণিত গ্রন্থাদি রচিত হলেও, এমন কি এই শতকের সপ্তম দশক থেকে নানা বিষয়ে গ্রন্থ, পুস্তিকা বাংলায় রচিত হলেও গ্রীক গণিতের ইতিহাস লেখার প্রচেষ্টা দেখা যায় না। বাংলা ভাষায় এই অবহেলিত বা উপেক্ষিত দিকের প্রতি লক্ষ রেখে লেখক **'গ্রীক গণিতের সংক্ষিপ্ত ইতিবৃত্ত'** রচনা করেছেন। বলা বাহুল্য, লেখক নিঃসন্দেহে বাংলা বিজ্ঞানসাহিত্যের ইতিহাসে অন্যতম পথিকৃৎ-এর সম্মান পাবেন।

এই গ্রন্থে প্রায় বারশ' বছরের গ্রীক গণিতের দিকপালদের জীবনী, গাণিতিক অবদান, আর্থ-সামাজিক পরিবেশ, গ্রীক গণিতের উত্থান-পতনের ইতিহাস সাবলীল ভাষায়, সুনির্বাচিত শব্দচয়নে, ...াশৈলীর অনুপম মাধুর্যে বর্ণিত হয়েছে।

...শিষ্টে লেখক অসামান্য গবেষণামূলক তথ্যাদি ...বেশন করেছেন। ভারত-গ্রীক সাংস্কৃতিক সংযোগ ...র্কে লেখকের মন্তব্যে পাঠক দ্বিমত পোষণ ...তে পারেন, কিন্তু তথ্য, তত্ত্ব, বিশ্লেষণ ও ...ষ্টিভঙ্গীতে পাঠক বিস্মিত হবেন। এবং আমরা ...শা করি, এতে ভারততত্ত্বান্বেষীরাও উপকৃত ...বেন।

গ্রীক গণিতের সংক্ষিপ্ত ইতিবৃত্ত

নন্দলাল মাইতি

"If the Greeks had not cultivated Conic sections, Kepler could not have superseded Ptolemy ; if the Greeks had cultivated Dynamics, Kepler might have anticipated Newton".

W. Whewell

লেখকের অন্যান্য গ্রন্থ :

গণিতের কথা ও কাহিনী (নিঃশেষিত)
গণিতের ললিত পাঠ (দ্বিতীয় পরিবর্ধিত ও মার্জিত সংস্করণ যন্ত্রস্থ)
প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিবৃত্ত
ভারতের অমর গণিতাচার্য

গ্রীক গণিতের সংক্ষিপ্ত ইতিবৃত্ত

নন্দলাল মাইতি

ফার্মা কেএলএম প্রাইভেট লিমিটেড
কলিকাতা * * * * ১৯৮৭

Greek Ganiter Saṁkṣipta Itibṛtta

Nandalal Maiti

প্রকাশক ঃ

ফার্মা কেএলএম প্রাইভেট লিমিটেড
২৫৭-বি, বিপিন বিহারী গাঙ্গুলী স্ট্রীট
কলিকাতা-৭০০০১২

প্রথম প্রকাশ—কলিকাতা, ১৯৮৭

মূল্য ঃ ১০০·০০

মুদ্রাকর ঃ
কিঙ্কর কুমার নায়ক
নায়ক প্রিন্টার্স
৮১/১-ই, রাজা দীনেন্দ্র স্ট্রীট
কলকাতা ৭০০ ০০৬

উৎসর্গ

গণিতের ইতিহাসে যাঁর বিশেষ অধিকার

বাংলা ভাষায় গণিতচর্চায় যিনি স্বয়ং উৎসাহী ও উৎসাহদাতা

ডঃ প্রদীপকুমার মজুমদার,

এম. এস-সি., পি. এইচ. ডি.,

এফ. আই. এ. এইচ. পি. এস., গণিতভূষণ।

সুহৃদ্বরেষু

মুখবন্ধ

সাম্প্রতিক কালে বাংলায় বিজ্ঞান সাহিত্যের যে গুণগত ও সংখ্যাগতভাবে সমৃদ্ধি ঘটেছে, তা বললে অত্যুক্তি হবে না। বাংলায় গণিত লেখা হলেও, পত্রপত্রিকা প্রকাশিত হলেও, এখনো ঠিক একটি বিশেষ ধরনের সাহিত্যের আকার ধারণ করেনি। এই পুস্তকটি প্রাচীন গণিত সম্পর্কে রচিত হয়েছে এবং গণিত-সাহিত্যের একটি অবদান হিসাবে দাবী করতে পারে।

এই জাতীয় পুস্তকে সাধারণত গ্রন্থপ্রণেতারা লোকপ্রিয়তার দিকে প্রলুব্ধ হন ও ফলে গণিত বিষয়ের দিক থেকে রসোত্তীর্ণ হল কিনা তার দিকে সতর্কতা থেকে বিচ্যুতি ঘটে যেতে দেখা যায়। বর্তমান লেখক সেই দিক থেকে নিজেকে সংযত রেখেছেন। উপরন্তু, গণিত বিষয় বলে গাণিতিক দৃষ্টিভঙ্গী ও গাণিতিক আঙ্গিক বাংলা ভাষায় গণিত লেখার শৈলীকে প্রভাবিত করবে। বর্তমান লেখকের প্রচেষ্টা এই পুস্তিকায় অনুসন্ধিৎসু পাঠক খুঁজে পেতে পারেন।

এ কথা সত্য যে, সব গণিতজ্ঞদের নিয়ে লেখা সম্ভব নয়। তবে যাঁরা দিকপাল, গল্পকাহিনীর মাধ্যমে তাঁদের অবদানের নির্যাসটুকু তুলে ধরেছেন লেখক। আশা করি, গণিত পুস্তকটি রসপিপাসু মনের খোরাক যোগাবে এবং গণিত রস আস্বাদনের জন্য অগাণিতিক ব্যক্তিদেরও আকৃষ্ট করবে। এই শুভ প্রচেষ্টা সত্যি প্রশংসার্হ।

৬৯/এ একডালিয়া রোড
কলকাতা-৭০০ ০১৯
২৬শে জানুয়ারী, ১৯৮৭

[signature]
সহউপাচার্য
কলকাতা বিশ্ববিদ্যালয়

ভূমিকা

ইতিহাস শুধু অতীতের বিস্মৃত কাহিনীকেই স্মরণ করিয়ে দেয় না, ভবিষ্যতের পথকেও সুনিয়ন্ত্রিত করে। অতীতের গৌরবময় কাহিনীকে নূতন পথে এগিয়ে যাবার জন্য অনুপ্রাণিত করে তোলে। অতীতের দুঃখ—ত্রুটি-বিচ্যুতি যাত্রাপথকে সতর্ক করে দেয়। একথা যেমন শৌর্য-বীর্যের বেলায় খাটে, তেমন কৃষ্টির বেলাতেও খাটে। কৃষ্টি দেশকে সমৃদ্ধশালী করে। যে জাতি উন্নতি করতে চায়, সেই জাতি অন্যান্য জাতির কৃষ্টির ক্রমবিকাশের ধারার কিভাবে উত্তরণ ঘটেছিল, তা জানতে আগ্রহী হবে। কৃষ্টির ক্ষেত্রে গণিতের কিছু ভূমিকা রয়েছে, বিশেষ করে গ্রীক গণিতের ইতিহাস সংস্কৃতির ক্ষেত্রে একটি উল্লেখযোগ্য স্থান দখল করে আছে। কিন্তু বাঙ্গালী জাতির দুর্ভাগ্য, গ্রীক গণিতের ইতিহাস নিয়ে কোন পূর্ণাঙ্গ বই বাংলা ভাষায় প্রকাশিত না হওয়ায় বাঙ্গালী এ রস থেকে বঞ্চিত হয়েছে।

জার্মানী, ইংল্যাণ্ড, মার্কিন যুক্তরাষ্ট্র, কানাডা, অস্ট্রেলিয়া, ফ্রান্স, পোলাণ্ড, জাপান, সোভিয়েট রাশিয়া প্রভৃতি দেশের গবেষকদের গ্রীক গণিতশাস্ত্র সম্বন্ধীয় গবেষণাপত্র নিরীক্ষার জন্য যখন আমার কাছে আসতো, তখন থেকে এই ধরনের একটি বই বাংলা ভাষায় লেখবার ইচ্ছা আমার হয়েছিল। কিন্তু সময়ের অভাবে এবং গবেষকদের তত্ত্বাবধানের জন্য একাজে হাত দিয়ে উঠতে পারিনি। মনে মনে এমন একজনকে খোঁজ করছিলাম যিনি গণিতশাস্ত্রের ইতিহাস নিয়ে ব্যাপক পড়াশুনা করেছেন এবং আধুনিক দৃষ্টিভঙ্গীতে বিভিন্ন তথ্য বিচার-বিশ্লেষণ করতে পারেন। শ্রীনন্দলাল মাইতি এমনই একজন ব্যক্তি যাঁর মধ্যে এইসব গুণগুলি তো আছেই, উপরন্তু বাংলা ভাষার উপর প্রচুর দখল আছে। ফলে বলা যেতে পারে, এ ব্যাপারে নন্দলালবাবুই সবচেয়ে উপযুক্ত ব্যক্তি। বলা বাহুল্য, বাংলা ভাষায় নন্দলালবাবু গ্রীক গণিতের ইতিবৃত্ত লিখে বঙ্গবাসীর বহু দিনের একটি ইচ্ছাকে বাস্তবে রূপায়িত করলেন।

'গ্রীক গণিতের সংক্ষিপ্ত ইতিবৃত্ত' গ্রন্থটিতে গ্রীক গণিতশাস্ত্রের ইতিহাস নিয়ে ব্যাপক আলোচনা করা হয়েছে। লেখক যেভাবে এই গ্রন্থে আলোচনা শুরু করেছেন, তা পড়ে রীতিমত অবাক হতে হয়। মনে হয়, এ যেন পি. এইচ. ডি. উপাধির জন্য লেখা কোন গবেষণাপত্র। অথচ বক্তব্য কি সুন্দর সহজ ও সরল। উপক্রমণিকা অংশে গণিতচর্চার প্রধান প্রধান কেন্দ্রসমূহের যে সংক্ষিপ্ত পরিচয়

দিয়েছেন, তা রীতিমত বিস্ময় জাগায়। গ্রন্থটিতে প্রায় অধিকাংশ গ্রীক গণিতজ্ঞদের জীবনী এবং তাঁদের কাজ নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। প্রসঙ্গত বলা প্রয়োজন, গ্রন্থখানি পণ্ডিতদের জন্য লেখা হয়নি, বরং এটিকে সর্বসাধারণের পাঠোপযোগী করে তোলবার চেষ্টা করা হয়েছে। তাই উদ্ধৃতির পর উদ্ধৃতি এবং পাদটীকার পর পাদটীকা দিয়ে উদ্বাস্ত করে তোলা হয়নি, এবং বাদানুবাদের বিষয়গুলিতে যুক্তি ও তর্কজালের সমাবেশ না করে যা সমীচীন মনে করেছেন তাকেই প্রাধান্য দেওয়া হয়েছে।

গ্রীক গণিতশাস্ত্রের ইতিহাস নিয়ে ব্যাপক গবেষণা করা হয়েছে বহুকাল আগে থেকেই এবং এ ব্যাপারে ফ্রান্স, ইংল্যাণ্ড, জার্মানী, পোলাণ্ড, ইটালী, সোভিয়েট রাশিয়া মুখ্য ভূমিকা পালন করেছিল। গ্রীক গণিতশাস্ত্রের ইতিহাস নিয়ে যাঁরা খুব বেশী গবেষণা .করেছেন, তাঁদের মধ্যে জে. জে. অলম্যান, মার্শাল ক্লাগেট, তোবিয়েস ডার্ণ্টজিগ, জেমস গাও, টি. এল. হীথ. গিনো কোরিয়া, পল হেনরী মাইকেল, পল ট্যানারী, আইভর থমাস, এডোয়ার্ড জেনর, টমাস টেলর, ফ্লোরিয়ান ক্যাজরী, অর্পদ জেবো, কুর্ট ফন ফ্রীজে, ও. বেকার, আর. এল. বুমবাউ, এফ. এস. কর্ণফোর্ড, অ্যালবার্ট গেরল্যাণ্ড, জে. এল. হেইবার্জ, ফাঁকো ল্যাসারে, ফ্রীডরীখ সলখোমেন, অটো টয়েপলিজে, আণ্ডার্স ওয়েণ্ডবার্গ, এইচ. জি. নিউমেন, আর্চিবল্ড, আই. ই. ড্রাবকিন, এম. কোহেন, ডব্লিউ. বি. ফ্রাঙ্কল্যাণ্ড, এফ. ও. হালৎস, স্টানফোর্ড থমাস, হেনরীখ ফোগট, এইচ. টি. ডেভিস, ইজে ডিজস্টাউস, জে. ই. হফম্যান, পি. সিডোলা, ডি. ই. স্মীথ, জোহানস ট্রপকে, হেরম্যান ভেইসনবার্গ, পল ফন ইকে, এইচ. এস. এম. কক্সটার, মাইকেল সাসলস্, এস. পেরেজ, ডব্লিউ. এইনস্টাইন, জি. ডি. সুইফট, আলেকজাণ্ডার জোনস, সেইডেনবার্গ প্রমুখ গণিত ঐতিহাসিকদের নাম উল্লেখযোগ্য।

গ্রীক গণিতশাস্ত্রের ইতিহাস নিয়ে কিছু বলতে গেলেই তিনজনের নাম সর্বাগ্রে মনে পড়ে। এঁরা তিনজন হলেন পীথাগোরাস, ইউক্লিড এবং আর্কিমিডিস। এঁদের মধ্যে ইউক্লিডের জ্যামিতি আমরা সর্বদা পড়ে থাকি। সেইজন্য ইউক্লিড সম্বন্ধে দু-চার কথা এখানে উল্লেখ করছি। ইউক্লিডের লেখা 'এলিমেণ্টস' সারা বিশ্বে প্রণালীবদ্ধভাবে লিখিত জ্যামিতির সুপ্রাচীন গ্রন্থ হিসাবে স্বীকৃতি লাভ করেছে। এটি গ্রীক ভাষা ছাড়াও ল্যাটিন, ইটালীয়, জার্মান, ফ্রেঞ্চ, ডাচ, ইংরাজী, স্পেনীয়, রুশীয়, সুইডিশ, ড্যানিশ এবং আধুনিক গ্রীক ভাষায় অনূদিত হয়েছে।

আরবী ভাষাতে এটি বহুবার অনূদিত হয়েছে। এ-সম্পর্কে কিছু তথ্য উৎসাহী পাঠকদের জন্য তুলে ধরা হলো।

খলিফা অল মনসুর (৭৫৪-৭৭৫ খ্রীঃ) বাইজাইনটাইন সম্রাটের নিকট হাজী খলিফা নামে একজনকে প্রেরণ করেছিলেন যিনি গ্রীকদের অন্যান্য গ্রন্থের সঙ্গে ইউক্লিডের "এলিমেণ্ট" 4b একটি কপি সংগ্রহ করে এনেছিলেন। তারপর খলিফা অল মামুনের সময় ইউক্লিডের এলিমেণ্টস-এর আর একটি কপি সংগ্রহ করা হয়। ফিরিস্তের মতে সম্ভবত আল হাজ্জাজ এবনে ইউসুফ এবনে মাতারের অনুবাদই প্রথম আরবীয় অনুবাদ। কয়েকজন আরবীয় গণিতজ্ঞদের নাম এখানে করা হলো যাঁরা ইউক্লিডের এলিমেণ্টসের অনুবাদ, ভাষ্য বা টীকা-টিপ্পনী করেছিলেন।

১. আবুল আব্বাস আল ফজল এবনে হাতিম আল নাইরেজী
২. আহমেদ এবনে উমর আল করাবিশী
৩. আল আব্বাস এবনে সাঈদ আল জাওহেরী
৪. আবু আবদুল্লাহ মোহাম্মদ এবনে ইসা আল খাহানী
৫. আবু জাফর আল খাজীন
৬. ইবনে রাহইয়েহ আল আরজানি
৭. মোহাম্মদ এবনে ইহাহিয়া এবনে আলি আব্বাস আল বুজ্জানি আবুল ওয়াফা
৮. আলি এবনে আহমেদ আবুল কাশিম অল অণ্টাকি
৯. সিন্দ এবনে আলি আবু তায়িব
১০. আবু ইউসুফ ইয়াকুব এবনে মুহম্মদ অর রাজি
১১. আবু ইউসুফ ইয়াকুব এবনে ইহশাক আল আব্বাস আল কিন্দি
১২. নাজিফ এবনে উমন আল কাশ
১৩. ইউহান্না এবনে ইউসুফ এবনে আল হারিথ এবনে আল আলকাশ
১৪. আবু মুহম্মদ আল হাসান বিন উবাদল্লা এবনে সুলেহমান এবনে ওয়াব।
১৫. কুস্তা এবনে লুকা আল বলবাকি
১৬. তাবিত ইবন কুরা
১৭. আবু সহান উইজীন এবনে রুস্তম আল কুহী
১৮. আবু নসর মোহাম্মদ এবনে মোহাম্মদ তারখান বিন উজদাগ আল ফারাবী
১৯. আবু সঈদ সিনান বিন তাবিত এবনে কূরা

২০. আবু আলি আল হাসান এবনে আল হাসান বিন আল হাইআন
২১. ইবন সীনা
২২. আহমেদ বিন আল হুসেন আল আহওয়ানী আল কাতিব
২৩. মুহম্মদ এবনে আসরফ সামসুদ্দিন অস সমরখন্দী
২৪. নাসিরুদ্দিন অর তুসী
২৫. মুসা এবনে মুহম্মদ বিন মামুদ
২৬. আবু দায়ুদ সুলেইমান বিন উকরা
২৭. আবু মহম্মদ এবনে আবদলবাকী আল বাকদাদী আল ফরাস
২৮. ইহাহিয়া এবনে মুহম্মদ বিন অবদাল বিন অবদলওয়াদিন
২৯. আবু আবদল্লাহ মুহম্মদ বিন মুহাদ অল জয়ানী
৩০. আবু নসর মনসুর বিন আলি বিন ইরাক

আজ সমাজকে অতীতের গৌরব শুনিয়ে পুণ্য কীর্তির জন্য উদ্বুদ্ধ করতে হবে। এই গ্রন্থের সহায়তায় সেই আশা যদি ফলবতী হয়, তবেই এই গ্রন্থ প্রণয়নের সার্থকতা থাকবে।

ডঃ প্রদীপকুমার মজুমদার

নিবেদন

মানবসভ্যতা ও সংস্কৃতির ইতিহাসে গ্রীকজাতির অসামান্য অবদান শ্রদ্ধার সহিত স্মরণযোগ্য। শৌর্য-বীর্যেই কেবল এই জাতি শ্রেষ্ঠ ছিল না, জ্ঞান-বিজ্ঞান সাধনায় তাঁদের অধ্যবসায়, অনুরাগ ও উৎসাহ সভ্যতার ইতিহাসে প্রেরণাস্বরূপ। অসি ও মসী চালনায় এমন দক্ষ জাতি বিশ্বে খুব কমই দেখা যায়। আলেকজাণ্ডার কেবল দিগ্‌বিজয়ী ও আক্রমণকারী নন, আলেকজান্দ্রিয়া বিশ্ববিদ্যালয়ের মত আন্তর্জাতিক প্রতিষ্ঠান গড়ে তোলার পরিকল্পনাও তাঁর ছিল ; যোদ্ধা ও বীর আলেকজাণ্ডারের মধ্যে অ্যারিস্টটলীয় গুণের সমাবেশও ছিল। বস্তুতপক্ষে, জ্ঞানার্জন ও জ্ঞানস্পৃহা গ্রীকজাতির অন্যতম শ্রেষ্ঠ লক্ষণ ও বৈশিষ্ট্য। এর পরিচয় ছড়িয়ে রয়েছে তাঁদের কাব্য-সাহিত্য-নাটক-স্থাপত্য-ভাস্কর্য-দর্শন-বিজ্ঞান-গণিতে। প্রতিটি বিষয়ের অনুশীলন ও গবেষণায় তাঁরা স্বল্পে সন্তুষ্ট হননি—সম্ভাব্য গভীরে প্রবেশ করেছেন —পূর্ণতা দানের আর্তি প্রকাশ করেছেন। সবকিছু যে তাঁরা সৃষ্টি করেছেন তা নয়, সব নতুন ভাবনার যে তাঁরাই জনক তাও নয় ; অপর জাতির কাছ থেকে ভাব ও আদর্শ গ্রহণ করতে দ্বিধাবোধ করেননি কখনো। কিন্তু সেই গৃহীত ভাব ও আদর্শ তাঁদের হাতে নতুন রূপ পেয়েছে, নতুন তাৎপর্য ও ব্যঞ্জনা লাভ করেছে। বস্তুত, সবের মধ্যে পরিপূর্ণতা আনার এমন আন্তরিক প্রয়াস অন্য কোন জাতির মধ্যে বিরল দৃষ্ট। প্লেটো বলতেন, "আমরা যা গ্রহণ করি, তার মধ্যেই পরিপূর্ণতা আনি।"

দর্শনে প্লেটো-অ্যারিস্টটল কিংবদন্তী। কেবল গ্রীকদর্শনে নয়, বিশ্ব দর্শনের ইতিহাসে তাঁদের মনীষা বিস্ময়কর। এই দুই মনস্বী শুধু দার্শনিক প্রজ্ঞায় নয়, জ্ঞানের বহুবিধ ক্ষেত্রে ছিল তাঁদের অবাধ বিচরণ। তাঁদের বিশ্বকোষ সদৃশ জ্ঞান ও প্রজ্ঞার তুলনা মেলা ভার। প্লেটো গণিতে আগ্রহী ছিলেন ; গাণিতিক প্রত্যয়-প্রতীতির স্বরূপ ও প্রকৃতি সম্বন্ধে তাঁর নিজস্ব ধারণা ছিল। গাণিতিক চিন্তনের উপযোগিতা সম্বন্ধে তাঁর সম্যক প্রত্যয় ছিল। তা ছাড়া দর্শন ও গণিতে যে নিবিড় সংযোগ, এই ধারণা তাঁর আগে কেউ উপলব্ধি করতে পারেননি। অবশ্য এই দুটি বিষয় মিলিয়ে-মিশিয়ে একাকার করে দেওয়ার কল্পনা তাঁর থাকলেও, তিনি এ-বিষয়ে সার্থক হতে পারেননি। তা হতে বহুদিন সময় লেগেছিল— দু-হাজার বছরেরও বেশী। সপ্তদশ শতাব্দীতে রেনে দেকার্তে এই সমন্বয়সাধন-কার্যে সফল হন যেদিন তাঁর *The Discourse on Method* প্রকাশিত হয়। প্লেটোর গাণিতিক চিন্তন ও উপযোগিতা বিষয়ে নানা মন্তব্য দেখা যায়। কিন্তু তাঁর অ্যাকাডেমীর তোরণ-দ্বারে ওই প্রতিষ্ঠানের আদর্শ হিসাবে যে কথাটি ছিল, তা

বুঝি সবকিছুকে ছাড়িয়ে যায়। *"Let no one ignorant of geometry enter here"*-এর তুলনা হয় না। বুদ্ধি ও যুক্তির প্রতি এমন আস্থা প্রাচীন সভ্যতার ইতিহাসে বিরল, সন্দেহ নেই। তাঁর অ্যাকাডেমীতে দর্শন পড়ার জন্য জ্যামিতির প্রাথমিক জ্ঞানের ওপরেই যে জোর দেওয়া হতো, তা নয়। ইতিহাস প্রসিদ্ধ এই প্রতিষ্ঠানে গণিতের পঠন-পাঠন, অনুশীলন ও গবেষণাও হতো। বিখ্যাত ইউডকসাস উচ্চতর জ্ঞানার্জনের জন্য এখানেই আসেন।

অ্যারিস্টটল মূলত দার্শনিক হিসাবে পরিচিত। কিন্তু কোন বিষয়ে তাঁর দখল ছিল না, তা গবেষণা করে বার করতে হয়। পদার্থবিদ্যা, গণিত, আবহাওয়াবিদ্যা, উদ্ভিদবিদ্যা, জীববিদ্যা, মনস্তত্ত্ব, অর্থনীতি, সাহিত্য, তত্ত্ববিদ্যা, নীতিবিদ্যা ইত্যাদি কোন বিষয়ে লেখেননি বলা শক্ত। গণিত বিষয়ে তাঁর পৃথক গ্রন্থ নেই সত্য, কিন্তু নানা গ্রন্থে এ-বিষয়ের উল্লেখ দেখা যায়। বিদ্যুৎস্ফুলিঙ্গের মত প্রতিভাশালী এই মনস্বী যা ধরেছেন, তা-ই অসামান্যতা লাভ করেছে। তিনি বিজ্ঞানের শ্রেণীবিভাগ করেছেন, সংজ্ঞা ও স্বতঃসিদ্ধের মধ্যে নানা অস্পষ্টতা দূর করে স্পষ্টতা এনেছেন। ইউক্লিড তাঁর গ্রন্থে এই মনীষীর দেওয়া স্বতঃসিদ্ধ গ্রহণ না করে পারেননি। স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্যের পার্থক্য নির্ণয় তাঁর গভীর মনীষার পরিচয় যেমন, গণিতের অগ্রগতিতে তাঁর এই অবদান যে গুরুত্বপূর্ণ তাতে সন্দেহের কারণ নেই।

প্রাচীন ভারতীয়দেরও গ্রীকদের মত গণিত-প্রীতি আর কোন জাতির ছিল কিনা সন্দেহ। ভারতীয় গণিতজ্ঞরা গণিতের গুরুত্ব বুঝতেন। তাই গণিতকে ময়ূরের শিখা, সাপের মাথার মণির সঙ্গে তুলনা করে সর্ববিদ্যার ওপরে স্থাপন করেছিলেন। এমন কি, নবম শতাব্দীতে আচার্য মহাবীর গণিতের প্রশংসা করে বলেছেন,—"**বহুভির্বিপ্রলাপৈঃ কিং ত্রৈলোক্য সচরাচরে। যত্কিঞ্চিদ্বস্তু তৎসর্বং গণিতেন বিনা ন হি॥**" অর্থাৎ 'বহু বিপ্রলাপে কি দরকার? ত্রিলোকে স্থাবর-জঙ্গম সমস্ত বস্তুরই গণিত-বহির্ভূত অস্তিত্ব নেই।' গ্রীকদেরও অনুরূপ গণিত-প্রীতি দেখা যায়। ইতিপূর্বে আমরা অ্যাকাডেমীর তোরণ-দ্বারের আদর্শ বাক্যটির উল্লেখ করেছি। তা ছাড়া পীথাগোরীয় সম্প্রদায় তো সংখ্যার মধ্যেই বিশ্বজগতের অপার রহস্যের সন্ধান করতেন। গণিতের অন্যান্য শাখায় গ্রীকদের অবদান থাকলেও জ্যামিতির প্রতি এমন আগ্রহ, অনুরাগ, গবেষণার তুলনা নেই। আরোহী-অবরোহী পদ্ধতিতে মাত্র কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্য অবলম্বন করে ক্ষুরধার যুক্তির জাল বিস্তার করে এই শাস্ত্রের বিশাল ইমারৎ গড়ে তোলা তাঁদের অমর কীর্তি। বহু প্রাচীন তত্ত্ব ও তথ্য কালক্রমে অচল হয়ে পড়ে পরিত্যক্ত হয়। কিন্তু গ্রীক জ্যামিতি এখনো অচল নয়, এখনো তার উপযোগিতা রয়েছে যদিও এযুগে আমরা অন-ইউক্লিডীয় জ্যামিতি বলে নতুন ধরনের জ্যামিতি দেখছি। তবুও লোকচেভস্কি ও বোলয়াই আবিষ্কৃত জ্যামিতি ইউক্লিডীয় জ্যামিতির স্বতঃসিদ্ধকে কেন্দ্র করেই

আবিষ্কৃত হয়েছে, এ কথাটি ভুললে চলবে না। ক্যাজরির ভাষায় বলতে গেলে, *"hardly anything done in mathematics has proved to be useless."*

প্রাচীন সভ্যতা ও সংস্কৃতির ইতিহাসে গ্রীকদের আর্বিভাব সকলের শেষে। গ্রীকসভ্যতা অপেক্ষাকৃত নবীন। তাই, গ্রীকজাতির পক্ষে বিশ্বসংস্কৃতির উত্তরাধিকার লাভ করতে সুবিধা হয়েছিল ; আগ্রহ ও প্রবণতা অনুযায়ী জ্ঞান-বিজ্ঞানের বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্র নির্বাচন করে গ্রহণ-বর্জন করা তাদের পক্ষে সুবিধা হয়েছিল। প্রাচীন মিশরের সঙ্গে এই জাতির নিবিড় সংযোগ ছিল, আর ব্যাবিলনীয় সভ্যতার সঙ্গে পরিচিত হওয়াও সম্ভব হয়েছিল স্থলপথে এশিয়া মাইনরের মধ্য দিয়ে। থ্যালেস, পীথাগোরাস, প্লেটো প্রমুখ উভয় সভ্যতার সহিত বিশেষ পরিচিত ছিলেন। এ ছাড়া প্রাচীন ভারতীয় জ্ঞান-বিজ্ঞানের সহিত তাঁদের পরিচয় ছিল বলে অনুমান করা হয়। বিশেষত, পীথাগোরীয় ভাবনায় ভারতীয় চিন্তা ও মনের বিশেষ সাদৃশ্য দেখা যায়। বিভিন্ন সভ্যতার সহিত সম্পর্ক ও মিলন ও পরিচয়ের জন্য গ্রীক-সভ্যতা সবিশেষ পরিপুষ্টি লাভ করেছিল, সন্দেহ নেই। তবুও এই জাতির বিশেষ লক্ষণ ও বৈশিষ্ট্যের অভাব দেখা যায় না। আর এই বৈশিষ্ট্যের জন্যই যে তারা অমর কীর্তি স্থাপন করতে পেরেছিল, তা বলাই বাহুল্য। যুক্তি ও ন্যায় ছাড়া অন্য কিছু দিয়ে তারা পার্থিব-অপার্থিব কোন-কিছুর বিচারে আগ্রহ দেখায়নি। যুক্তি-ন্যায়ের সফল প্রয়োগ করেই তাঁদের গাণিতিক গবেষণা। প্রাচীনকালের নিরিখে বিজ্ঞানচেতনার এমন প্রবল প্রকাশ অন্যত্র দেখা যায় না। আমাদের এই সংক্ষিপ্ত বই-এ একথাই আমরা উপস্থাপন করতে চেয়েছি।

গণিতের ইতিহাস রচনার পদ্ধতি ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে। জীবনী অবলম্বন করে, বিষয় অবলম্বন করে, সামাজিক পটভূমিকায় গাণিতিক গবেষণা স্থাপন করে গণিতের ইতিহাস লেখা যেতে পারে। শেষেরটির প্রতি আধুনিক মন বিশেষ আগ্রহী। কিন্তু তা হলেও অন্যগুলির উপযোগিতা তুচ্ছ করার মত নয়। বিষয় জানা সবার আগে দরকার, তারপর বিষয়ীকে জানা চাই,—একথা অনেকে বলে থাকেন। কিন্তু আমার মনে হয় এ দুটির কোনটি আগে আর কোনটি পরে বিচার করা কঠিন এবং বিতর্কের। তাই আমি বিষয়ীকে অবলম্বন করে বিষয়ের সংক্ষিপ্ত পরিচয় দিয়েছি। এতে ত্রুটি থাকলেও অন্তত প্রথম পাঠকের সুবিধা হবে, এবং বিষয়ে আগ্রহ বৃদ্ধি পাবার সম্ভাবনা। আর তৃতীয় প্রকারের গণিতের ইতিহাস পরিণত ও পরিশীলিত পাঠকদের উপযোগী। আমি সেই দুরূহ কাজে অগ্রসর হয়নি। বস্তুত-পক্ষে তাতে আমার অধিকারও নেই। যাই হোক, প্রাচীন গণিতজ্ঞদের জীবনী অবলম্বন করে কেন এই ইতিহাস রচনা, সে-সম্পর্কে আরো দু-একটি কথা বলতে চাই। অনেকে জানেন, কাব্য-সাহিত্য-শিল্প ইত্যাদির বিচার-বিশ্লেষণে স্রষ্টার জীবনের সার্বিক আলোচনা অপরিহার্য বলে গণ্য করা হয়। স্রষ্টার প্রেরণা, বিশেষ বিশেষ রচনার উৎস অনুসন্ধান করতে তাঁর জীবনপটের পাতা ওলটানো জরুরী।

কিন্তু বৈজ্ঞানিক ও গাণিতিক আবিষ্কারের পশ্চাতে আবিষ্কারকের জীবনী, তাঁর মানসিকতা, প্রবণতা ও সমস্যা গ্রহণের উৎস প্রায় অনালোচিত থাকে। জনসমক্ষে আবিষ্কারের ফল ঘষামাজা হয়ে প্রকাশিত হয়, কিন্তু আবিষ্কারের প্রচেষ্টা, ত্রুটি, ভ্রান্তি ইত্যাদি প্রকাশিত হয় না। জনগণও চান আবিষ্কারের ফল ও তার উপযোগিতা। আবিষ্কারকের জীবনীতে তাদের আগ্রহ-আকর্ষণ নেই। অবশ্য স্বীকার করতে হবে কবি-সাহিত্যিক-শিল্পীর মত বিজ্ঞানী ও গণিতজ্ঞদের জীবনী মোটেই রোমাঞ্চপূর্ণ নয়, অ্যাডভেঞ্চার সুলভও নয়। বিজ্ঞানী ও গণিতজ্ঞদের জীবনী প্রকৃতপক্ষে মনন-মূলক, চিন্তন-সঙ্কটে পরিপূর্ণ। সাধারণের আগ্রহ না থাকলেও মননশীলতার ইতিহাসে এসব জীবনীর মূল্য কম নেই। কিন্তু দুঃখের বিষয়, প্রাচীন বিজ্ঞানী ও গণিতজ্ঞদের জীবনের অভ্রান্ত বিবরণ নেই বললেই চলে। অথচ প্রাচীন যুগের কবি-সাহিত্যিক ইত্যাদির ক্ষেত্রেও এরকম প্রযোজ্য। কিন্তু তা সত্ত্বেও কবি-সাহিত্যিক ইত্যাদির বহু জীবনী রচিত হয়েছে। তুলনায় বিজ্ঞানী ও গণিতজ্ঞদের জীবনী স্বল্প, বিশ্বখ্যাত কিছু ব্যতিক্রম মাত্র,—গ্রীক গণিতজ্ঞদের জীবনী তেমন নেই। কিন্তু যে টুকরো ঘটনা, কিংবদন্তী ইত্যাদি প্রচলিত, তাই সঙ্কলন করে সামান্য এই বই-এ পরিবেশিত হয়েছে বিষয়ে আগ্রহ ও অনুরাগ বৃদ্ধির আশায়। তা ছাড়া গাণিতিক প্রত্যয়-প্রতীতি জটিল ও বিমূর্ত। তাই আবিষ্কারের ইতিহাস জানা থাকলে জটিলতা ও বিমূর্ততা অনেকখানি সজীব, সহজ ও মূর্ত হয়ে ওঠে। গণিতজ্ঞদের জীবনী ও আবিষ্কারের ইতিহাস এ-বিষয়ে প্রভূত সাহায্য করতে পারে বলে মনে করা যেতে পারে।

নবজাগরণের প্রেরণায় ইউরোপে নব উৎসাহ ও উদ্দীপনা দেখা দেয়, জ্ঞান-বিজ্ঞানের সর্বক্ষেত্রে অদম্য জ্ঞানস্পৃহা ও কৌতূহল ইউরোপের সমগ্র ভূখণ্ডে ছড়িয়ে পড়ে। নবজাগৃতির অন্যতম বৈশিষ্ট্য অতীত ঐতিহ্য ও সংস্কৃতির প্রতি অনুরাগ ও আগ্রহ। এর ফলে গ্রীক জ্ঞান-বিজ্ঞানের অনুশীলন ও অনুসন্ধানে ইউরোপীয় পণ্ডিতেরা ব্যাপৃত থাকেন, এবং বহু মূল্যবান তথ্যাদি উদ্ধার করে আধুনিক মনের উপযোগী করে জনসমক্ষে প্রকাশ করতে থাকেন। ইউরোপীয় মানসে যুক্তি ও ন্যায়ের প্রতি একান্ত অনুরাগ ও আস্থা গ্রীক জ্ঞান-বিজ্ঞান অনুশীলনের ফল বললে অত্যুক্তি হয় না।* আধুনিক ইউরোপ গ্রীক জ্ঞান-বিজ্ঞান ছাড়িয়ে বহু দূরে এসে

---

* কোপারনিকাস পৃথিবীর গতি ও অন্যান্য গ্রহদের অসম গতি সম্পর্কে ধারণা করতে গিয়ে বলেছেন,—

"......the Pythagorean Phylolaos thinks that (the Earth) revolves round the fire along an inclined circle as do the Sun and the Moon. Heracleides of Pontus and the Pythagorean Ekphantos though they believe that the Earth does move, think that it is rotary, not translatory motion… My interest having thus been aroused, I too began to ponder about the movements of the Earth".

Copernicus : Scholar and Citizen, Inter Press, Publishers, Warshaw, 1972, Page—108-109.

পড়েছে। কিন্তু তাদের সবের প্রেরণা ও উৎসাহের মূল গ্রীক জ্ঞান-বিজ্ঞান অনুশীলন, পঠন-পাঠন ও গবেষণার মধ্য দিয়ে। বস্তুত আধুনিক ইউরোপীয় সভ্যতা যতখানি গ্রীকসভ্যতার নিকট ঋণী, তেমন আর কোন সভ্যতার নিকট নয়। এ-যুগের সভ্যতা মানেই ইউরোপীয় সভ্যতা। তাই বর্তমান বিশ্ব প্রত্যক্ষভাবে না হলেও পরোক্ষভাবে গ্রীকসভ্যতার নিকট ঋণী বলা চলে।

প্রাচীন ভারতীয় সভ্যতা, সংস্কৃতি ও ঐতিহ্যে বাঙালীর অবদান নেই বললেই চলে। প্রাচীন গ্রন্থের বহু জায়গায় বাঙালী 'ম্লেচ্ছ' বলে অভিহিত। এ দেশে এলে আর্যদের প্রায়শ্চিত্ত করতে হতো। মধ্যযুগে দু-একজন বাঙালী কবি-মনস্বীর দেখা মেলে সত্য, কিন্তু তাঁরা কেউই অনন্যসাধারণ প্রতিভাধর ছিলেন না। উনবিংশ শতাব্দীতে বাংলায় নবজাগরণ ঘটে। সীমিত অর্থে না হলেও, বাঙালী নতুন উদ্যম ও উৎসাহে ইউরোপীয় জ্ঞান-বিজ্ঞান আয়ত্ত করার প্রয়াস পায়। মিশনারীদের প্রচেষ্টায় ও একদল স্বদেশপ্রেমীদের আন্তরিক প্রয়াসে বাংলা ভাষায় বিজ্ঞানচর্চা শুরু হয়। প্রথম যে বইটি মুদ্রিত আকারে প্রকাশিত হয় তা ছিল অঙ্কের বই। তারপর পদার্থবিজ্ঞান, রসায়নবিজ্ঞান, প্রাণিবিজ্ঞান ইত্যাদি বিষয়ে বই লেখা হতে থাকে। অক্ষয়কুমার দত্তের আবির্ভাবের পর বাংলা বিজ্ঞানচর্চা নতুন মোড় নেয়। প্রাতঃস্মরণীয় বিদ্যাসাগর, আচার্য প্রসন্নকুমার সর্বাধিকারী, কৃষ্ণমোহন বন্দ্যোপাধ্যায়, ভূদেব মুখোপাধ্যায়, রাজেন্দ্রলাল মিত্র, এমনকি সাহিত্য-সম্রাট বঙ্কিমচন্দ্রও বাংলা ভাষায় বিজ্ঞানচর্চার পথ সুগম করে গেছেন। তারপর বাংলা ভাষায় বিজ্ঞানচর্চা বহুদূর অগ্রসর হয়েছে, পাঠ্যপুস্তক বহির্ভূত গ্রন্থের প্রকাশ আগের তুলনায় বেড়েছে। মাতৃভাষায় বিজ্ঞানচর্চার একটি দৃঢ় ভিত্তি রচনা করে বিজ্ঞানাচার্য সত্যেন্দ্রনাথ ইতিহাস সৃষ্টি করেছেন। সত্যি কথা বলতে কি, বিষয়, উপস্থাপনা, ভাষা ও রচনাশৈলীতে অনেক চমৎকারীত্ব এসেছে, সন্দেহ নেই। কেবল 'জ্ঞান ও বিজ্ঞান' নয়, আরো বেশ কয়েকটি ছোট-বড়দের বিজ্ঞান পত্রিকা আত্মপ্রকাশ করেছে। কিন্তু আশ্চর্যের বিষয়, বাংলা বিজ্ঞানচর্চার এই পৌনে দু-শ' বছরের ইতিহাসে গ্রীক গণিতের আলোচনা হয়েছে অতি অল্প,—নগণ্য। প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিহাস বিষয়ে ইংরেজী ও বাংলায় গ্রন্থ রচিত হয়েছে, কিন্তু গ্রীক গণিতের ইতিহাস বাংলা ভাষায় রচিত হয়নি—এটা কম আশ্চর্যের নয়। কারণ নানা রকম থাকতে পারে, কিন্তু তা আলোচনার সুযোগ ও অবকাশ আমাদের নেই। কেবল আমরা বলতে পারি গ্রীক গণিতের ইতিহাস নিয়ে ক্ষুদ্র পুস্তিকা পর্যন্ত বাংলায় লেখা হয়নি। অথচ এই সেই বাংলা যেখানে জ্ঞানের চর্চা ও বুদ্ধির অস্ত্রে শান দেওয়া এক সময় বাঙালীর মননচিন্তার জগৎ আচ্ছন্ন করে রেখেছিল।* বাংলা ভাষার এই অভাব ও দৈন্যের দিকটি পূরণ করার জন্য ও বাংলা বিজ্ঞান-সাহিত্যের মর্যাদা রক্ষাকল্পে আমাদের ক্ষুদ্র প্রয়াস এই 'গ্রীক গণিতের সংক্ষিপ্ত ইতিবৃত্ত'।

* বাঙালীর ইতিহাস (সংক্ষিপ্ত সংস্করণ)—নীহাররঞ্জন রায়, পৃ—৪৪৮

আঠারো

'গ্রীক গণিতের সংক্ষিপ্ত ইতিবৃত্ত' যে সম্পূর্ণ ত্রুটিমুক্ত, একথা জোর করে বলা সম্ভব নয়। তথ্য ও তত্ত্বের বিশ্লেষণে দৃষ্টিভঙ্গীর পার্থক্য থাকতে পারে। পরিভাষা নির্বাচনে সর্বত্র কতটা সফল হয়েছি বলা দুষ্কর। তবে বহুল প্রচলিত পরিভাষা ব্যবহার করার প্রয়াস পেয়েছি। যদি কোন গাণিতিক তথ্য বা তত্ত্ব সঠিকভাবে প্রকাশিত না হয়ে থাকে, তা হলে লেখকের অক্ষমতা অবশ্যই স্বীকার্য। তবে প্রথম প্রয়াস হিসাবে সুধী পাঠক ক্ষমাসুন্দর চোখে দেখবেন, এই আশা করছি। সেই সঙ্গে এই নিবেদন যে, ত্রুটি ঘটলে যেন লেখকের গোচরে আনা হয়। তা হলে সংশোধন ও পরিমার্জন করে বইটিকে আরো সার্থক করে তোলা সম্ভব।

গ্রীক গণিতের ইতিহাস লেখায় একটি প্রধান বাধা গ্রীক গণিতজ্ঞদের নামের বাংলা বর্ণীকরণ। মূল গ্রীক ভাষায় লেখকের বিন্দুমাত্র অধিকার নেই, ইংরেজী নামের বাংলা উচ্চারণ বৈশিষ্ট্য ও রীতি বজায় রেখে অগ্রসর হয়েছি মাত্র। যেমন, 'হিপ্পিয়াস', 'প্যাপ্পাস' না লিখে 'হিপিয়াস' ও 'প্যাপাস' লিখেছি। অবশ্য এ বিষয়ে সমরেন্দ্রনাথ সেনের বিজ্ঞানের ইতিহাসে যে নাম লেখার রীতি রয়েছে, সেটিই গ্রহণ করেছি।

কোন কোন সমালোচক প্রশ্ন তোলেন যে, বাংলা ভাষায় লেখা বই-এর মধ্যে অন্য ভাষার উদ্ধৃতি না থাকাই বাঞ্ছনীয় বা থাকলেও তাদের স্থান পাদটীকায় বা পরিশিষ্টে হওয়া উচিত। এরূপ না হলে পড়ার মধ্যে পদে পদে হোঁচট খেতে হয়, একটানা পাঠে ছেদ পড়ে। কথাটি একদিক থেকে অযৌক্তিক নয়। কিন্তু অতি সাধারণ পাঠক ছাড়া যাঁরা পরিশীলিত ও আগ্রহী তাঁরা লেখকের নানা মন্তব্যের প্রামাণিকতা জানতে চান, পরিশিষ্টে বা পাদটীকায় উদ্ধৃতি থাকলে বা কেবল গ্রন্থের নাম ও পৃষ্ঠার উল্লেখ থাকলে পাঠে আরও বিঘ্ন উপস্থিত হয় বা পৃষ্ঠা ধরে প্রামাণিকতা বিচার করার আগ্রহ নষ্ট হয়। তাই এই রীতি অবলম্বন করিনি। তবে স্কুলের ছাত্রছাত্রী বা সাধারণ শিক্ষিত পাঠক উদ্ধৃতি কণ্টক এড়িয়ে গেলেও মূল বিষয়ের অনেকখানি জানতে পারবেন বলে মনে হয়। বস্তুত এই বই-এ আলোচিত বিষয়ের শতকরা পঁচাশী-নব্বই ভাগই সাধারণ শিক্ষিত পাঠকদের জন্য, আর বাকী অংশ উচ্চ মাধ্যমিক জ্ঞানের মধ্যে রয়েছে বলে আমার বিশ্বাস।

বইটি লেখায় প্রথম প্রেরণা যোগান প্রয়াত কানাইলাল মুখোপাধ্যায়। ফার্মা কেএলএম-এর কর্ণধার হিসাবে তাঁর খ্যাতি সুবিদিত। স্বল্পকাল মাত্র তাঁর বহু বিষয়ে অগাধ অধিকার সম্বন্ধে জানতে পারি। আমার 'প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিবৃত্ত'-এর তিন-চার ফর্মা ছাপার সময়ে তাঁর আকস্মিক মৃত্যু হয়। তাঁর মৃত্যুতে প্রকাশন জগতের অপূরণীয় ক্ষতি হয়েছে, সন্দেহ নেই। কিন্তু এই অনুজ লেখক ব্যক্তিগতভাবে তাঁর পরামর্শ ও উপদেশ থেকে বঞ্চিত হওয়ায় আত্মীয় বিয়োগের ব্যথা অনুভব করছেন। 'গ্রীক গণিতের সংক্ষিপ্ত ইতিবৃত্ত'-এর প্রকাশকালে তাঁকে স্মরণ করে শ্রদ্ধা জানাই।

বাংলা ভাষায় গণিতচর্চায় যিনি সর্বদা উদারহস্ত ও সর্বপ্রকার সাহায্যে অকুণ্ঠিত সেই ডঃ প্রদীপকুমার মজুমদার মহাশয়ের নিকট আমার ঋণের অন্ত নেই। দুর্লভ বই দিয়ে, পরামর্শ ও উৎসাহ দিয়ে তিনি সাহায্য করে চলেছেন। তাঁর নামে বইটি উৎসর্গ করে তাঁকে আন্তরিক কৃতজ্ঞতা ও ধন্যবাদ জানাই। তা ছাড়া তাঁর মূল্যবান ভূমিকা বইটির মূল্য বৃদ্ধি করেছে, বলা বাহুল্য।

গ্রীক গণিতের চিরাচরিত তিনটি সমস্যার একটির ওপর 'জ্ঞান ও বিজ্ঞান' পত্রিকায় প্রবন্ধ লিখি। প্রকাশের মাস ছয়েক পরে দুর্গাপুর থেকে এক ইঞ্জিনীয়ার ভদ্রলোক ঘুরে ঘুরে অবশেষে চুঁচুড়া পোস্ট অফিসে আমার সঠিক ঠিকানা যোগাড় করে দেখা করতে আসেন। এবং তিনি কীভাবে আমার প্রবন্ধটি পড়ে অনুপ্রাণিত হয়ে গবেষণামূলক একটি প্রবন্ধ রচনা করেন তার কথা বলেন। তাঁর প্রবন্ধটি গ্রহণযোগ্য কিনা জানি না। কিন্তু সামান্য একটি জনপ্রিয় প্রবন্ধ তাঁকে উৎসাহিত করেছে এর চেয়ে আমার আর কোন সার্থকতা আছে বলে জানি না। বাংলা ভাষায় গণিতচর্চা করে কিছু লেখার মাঝে মাঝে হতাশ হয়ে পড়তে হয় নানা জটিলতা ও অসুবিধার জন্য। ওই প্রবন্ধকারের সঙ্গে আলাপ হয়ে আশার আলো দেখা দিচ্ছে বলে মনে হয়। তাঁকে কৃতজ্ঞতা ও ধন্যবাদ জানাই কষ্ট স্বীকার করে লেখকের সঙ্গে দেখা করার জন্য।

এই গ্রন্থে আলোচিত কিছু বিষয়ের ওপর কিছু প্রবন্ধ খ্যাত ও অখ্যাত বাংলা বিজ্ঞান পত্রিকায় প্রকাশিত হয়। 'জ্ঞান ও বিজ্ঞান', 'অণুবীক্ষণ', 'কিশোর জ্ঞান-বিজ্ঞান', 'গণিতচর্চা', 'জ্ঞান বিচিত্রা' প্রভৃতি পত্রিকার সম্পাদক ও প্রকাশককে ধন্যবাদ ও কৃতজ্ঞতা জানাই।

বন্ধু সুব্রত কর কয়েকটি মূল্যবান বই কেনায় আমায় প্রভূত সাহায্য করেছেন। তা না হলে এই বই লেখা সম্ভব হতো কিনা সন্দেহ। তা ছাড়া নানা বিষয়ে তাঁর সুপরামর্শ আমায় সঠিক সিদ্ধান্ত নিতে সাহায্য করেছে। বন্ধুবর ও তাঁর স্ত্রী অনীতা করের সহৃদয় ও আন্তরিক আতিথেয়তা কলকাতায় আত্মীয়-স্বজনহীনতা পূরণ করেছে। তাঁদের কৃতজ্ঞতা ও ধন্যবাদ জানিয়ে ঋণ শোধ করা যায় না। তাঁরা আত্মীয়ের চেয়ে আত্মীয় ও আপন জন। এ ছাড়া বাল্যবন্ধু ডাঃ কালাচাঁদ রায় ও তাঁর স্ত্রী প্রণতি রায় সর্বদা সর্বপ্রকার সাহায্যের হস্ত প্রসারিত করে রেখেছেন। তাঁরা বড়ই আপনজন। তাঁদের কৃতজ্ঞতা জানাই। অনুজ ডাঃ গোপাল চন্দ্র মাইতি দাদার কাজে সাহায্য করেন ও উৎসাহ দেন। আমার ছাত্র প্রদ্যুৎ বাগ ও অশোক খামরুই আমায় নানাভাবে সাহায্য করে থাকে।

কলকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের ফলিত পদার্থবিদ্যার রীডার ডঃ অজয় কুমার চক্রবর্তী মহাশয় আমায় কৃতজ্ঞতাপাশে আবদ্ধ করেছেন। তাঁর মত সহৃদয় ও উদার, বাংলা ভাষায় বিজ্ঞানপ্রেমী কমই আছেন। তাঁর মূল্যবান উপদেশ ও পরামর্শ আমায় নানা কাজে উৎসাহিত, অনুপ্রাণিত ও উদ্দীপ্ত করে। পাণ্ডুলিপি আগাগোড়া পড়ে তাঁর

মন্তব্য আমায় বিশেষভাবে উৎসাহিত করেছে। তাঁকে নমস্কার ও কৃতজ্ঞতা জানাই।

কলকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের সহ-উপাচার্য অধ্যাপক দিলীপকুমার সিংহ, পি.এইচ. ডি., এফ. এন. এ. এস-সি., এফ. আই. এম. এ. (ইউ. কে.) আগ্রহভরে আমার পাণ্ডুলিপি পাঠ করে মূল্যবান মুখবন্ধ লিখে দিয়েছেন। তিনি কেবল গণিতবেত্তা ও প্রখ্যাত অধ্যাপকই নন, গণিত শিক্ষাদানের উৎকর্ষসাধনে তাঁর আন্তরিক প্রয়াস ও অবদান আন্তর্জাতিক স্বীকৃতিলাভ করেছে। তাঁর মননশীল ভূমিকা এই বই-এর মূল্য বৃদ্ধি করেছে, সন্দেহ নেই। তাঁকে শ্রদ্ধা, কৃতজ্ঞতা ও নমস্কার জানাই।

ফার্মা কেএলএম প্রাইভেট লিমিটেডের ম্যানেজিং ডাইরেক্টর শ্রী রথীন্দ্রনাথ মুখোপাধ্যায় বইটি প্রকাশে সর্বপ্রকার দায়িত্ব গ্রহণ করে আমায় ভারমুক্ত করেছেন। বইটি প্রকাশে তাঁর যত্ন, সর্বোপরি তাঁর অমায়িক ব্যবহার বর্তমানে প্রায় দুর্লভ। তাঁকে প্রীতি নমস্কার জানাই।

প্রুফ সংশোধন ও বিষয়বস্তু বিন্যাসে সাহায্য করেছেন শ্রদ্ধেয় শ্রীপতিপ্রসাদ ঘোষ ও অনুজপ্রতিম শ্রীকাশীনাথ পাল। তাঁদের কৃতজ্ঞতা ও নমস্কার জানাই।

নায়ক প্রিণ্টার্স-এর শ্রীকিঙ্কর নায়ক বইটি মুদ্রণত্রুটিমুক্ত করার আন্তরিক প্রয়াস পেয়েছেন। তাঁকে ধন্যবাদ ও নমস্কার জানাই। এসব সত্ত্বেও মুদ্রণ-ত্রুটি সম্পূর্ণ মুক্ত হয়নি। এজন্য ক্ষমাপ্রার্থী।

নন্দলাল মাইতি

কৃতজ্ঞতা স্বীকার

গ্রন্থে পরিবেশিত চিত্র ও অঙ্কনাদির জন্য নিম্নলিখিত গ্রন্থকার ও প্রকাশকদের নিকট কৃতজ্ঞ ও ঋণী ঃ

Boyder, C. B., *The History of Calculus*, Dover Publications, Inc., New York, 1959

Bunt, Jones, Bedient, *The Historical Roots of Elementry Mathematics*, Prentice Hall Inc., 1976

Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford, New York, 1977

Milner, T., *The Astronomical Discoveries*, New Delhi, 1975

Smith, D. E., *History of Mathematics*, Dover Publications, Inc., New York, 1958

সেন, সমরেন্দ্রনাথ, বিজ্ঞানের ইতিহাস, ইণ্ডিয়ান অ্যাসোসিয়েশন ফর দি কালটিভেশন অব সায়েন্স, ১৯৬২

মজুমদার, প্রদীপকুমার, **Photo :** *Bibliteca Vaticana.*

সূচীপত্র

উপক্রমণিকা

"Whatever we Greeks receive, we improve and perfect."

—Plato

কবে এবং কোথায় গণিতের সৃষ্টি হয়েছিল,—এর উৎপত্তির আদিম ইতিহাস সম্বন্ধে নিশ্চিত মন্তব্য করা অসম্ভব। তবে বিশ্বের প্রাচীনতম সভ্যদেশগুলির ইতিহাস পড়লে জানতে পারা যায় ওইসব দেশে গণিতের চর্চা হতো। এই গণিত চর্চা প্রধানত ছিল প্রয়োজনভিত্তিক,—গণিতের মূল ভিত্তি যে বিমূর্ততা, সরল ও সহজ প্রত্যয় থেকে ক্রমশ জটিলতর প্রত্যয়ের অবতারণা, তখনো তা দেখা দেয়নি। ইতিহাসের আরো পিছনের দিকে তাকালে দেখা যায় সভ্য হবার অনেক আগে থেকেই মানুষ গণিত ব্যবহার করে আসছে,—গৃহপালিত পশুর হিসাব, শস্যের পরিমাণ ইত্যাদি মানুষ ইতিহাস-পূর্ব যুগ থেকেই করে আসছে।

মিশর, ব্যাবিলন, চীন, ভারত ইত্যাদি প্রাচীন সভ্যদেশগুলিতে খ্রীস্টপূর্ব দু-তিন হাজার বছর আগে গণিতের চর্চা হতো এবং কোন কোন দেশে এই ঐতিহ্য খ্রীস্টীয় শতাব্দীর অনেক দূর পর্যন্ত বিস্তৃত ছিল। কিন্তু ওই সব দেশের গণিতের প্রকৃতি ও স্বরূপ বিশ্লেষণ করলে দেখা যায় আধুনিক যুগে যেভাবে গণিতের চর্চা হয়েছে ও হচ্ছে তেমনভাবে হয়নি। তখন বিশেষ বিশেষ সামাজিক ও রাষ্ট্রীয় প্রয়োজনে গণিতের চর্চা ও অনুশীলন হয়েছে ; আর তা বেশীর ভাগ ক্ষেত্রেই খণ্ডিত আকারে। গণিত তখন স্বাধীন সত্তাবিশিষ্ট একটি বিষয় হিসাবে পরিগণিত হয়নি,—জ্যোতি-বিজ্ঞান-জ্যোতিষের অঙ্গ হিসাবে আলোচিত হয়েছে। অর্থাৎ গণিত তখন ছিল অপ্রধান বিষয়। বস্তুত, সে-যুগের শাসকশ্রেণীর মনোভাব, সমাজের শীর্ষস্থানীয়দের কৌশল ও প্রতিপত্তি এবং সামাজিক কাঠামো এর জন্য বহুলাংশে দায়ী. এই যুক্তিতে আপত্তি থাকলে একে ইতিহাসের অনিবার্যতা বলে উল্লেখ করাও যায়।

ভাঙা-গড়া, ঘাত-প্রতিঘাত ও নানা পরিবর্তনের মধ্য দিয়ে ইতিহাস এগিয়ে চলে। ইতিহাসের পথ মসৃণ নয়,—উপল-বন্ধুর। দেশে দেশে যুদ্ধ-বিগ্রহ, ব্যবসা-বাণিজ্য আর মেলামেশা, এমন কি বিভিন্ন জাতির সংমিশ্রণ ইত্যাদির মধ্য দিয়ে সৃষ্টি হয় নতুন নতুন ইতিহাসের অধ্যায়,—পুরাতনের নিরিখে নতুন প্রত্যয়। এমনি করে ঐতিহাসিক বিবর্তনের মধ্য দিয়ে গ্রীক জাতি এক ইতিহাস সৃষ্টি করল,—মানবসভ্যতা ও সংস্কৃতি, চিন্তাশক্তি ও মননশীলতার এক অপূর্ব ইতিহাস। একদিনে বা অল্প সময়ে এই গৌরবময় ইতিহাস সৃষ্টি হয়নি,—লেগেছে শত, সহস্র বছর। জ্ঞান-বিজ্ঞানের সর্বস্তরে এই জাতির ঐতিহ্য, সংস্কৃতি ও বৈশিষ্ট্য উপলব্ধি করতে হলে এর প্রাচীন ইতিহাসের মূল স্রোত ধারার সঙ্গে সামান্য পরিচিতি দরকার।

ইতিহাসের প্রেক্ষাপটে গ্রীকজাতি ও গ্রীস

প্রাচীন গ্রীসের ইতিহাস নব্য প্রস্তর যুগ (Neolithic Period) থেকে শুরু। এই সময় গ্রীসের বাসিন্দারা ছিল কৃষিজীবী। ক্রমে ক্রমে এই কৃষিজীবী জাতিরাই উত্তর-দক্ষিণে **থেসালী** থেকে **পেলোপোনেসাস** পর্যন্ত ছড়িয়ে পড়ল। নব্যপ্রস্তর যুগের পর এল ব্রোঞ্জ যুগ। তখন গ্রীসে তামার ব্যবহার প্রচলিত হয়। গ্রীসের দক্ষিণে এই জাতি বসতি স্থাপন করে। যে-সব নদনদী ও জনপদের নামের শেষে **'ন্থ'** (Nt) বা দ্বিত্ব **'স'** (ss), যেমন, **'করিন্থ'**, **'কেফিসাস'** (Kephissus) প্রভৃতি, তা হচ্ছে এই ব্রোঞ্জ যুগের মানুষের নামকরণের নমুনা।

আরো এক হাজার বছর পরে অর্থাৎ খ্রীস্টপূর্ব দু-হাজার শতাব্দীতে গ্রীসে আর একটি জাতির আগমন লক্ষ করা যায়। উত্তরাঞ্চল থেকে এসে এরা বসতি স্থাপন করে, আর এরাই গ্রীক ভাষা বহন করে আনে। কিন্তু গ্রীসের ওপর আর একটি সংস্কৃতি, **ক্রীট-সংস্কৃতি** খ্রীস্টপূর্ব **1600** শতাব্দীতে গ্রীসের জীবনধারায় প্রভূত প্রভাব বিস্তার করে। তখন গ্রীসের অধিকাংশই গভীর অরণ্যে পরিপূর্ণ, আর গ্রীক জাতি তখনো যাযাবর শ্রেণীর। ক্রীট-সভ্যতার সঙ্গে ব্যাবিলনীয় ও সিন্ধু সভ্যতার সাদৃশ্য লক্ষ করার মত; ব্যবসা-বাণিজ্যে এই সভ্যতা বেশ উন্নত ছিল। এই সভ্যতার সবচেয়ে বড় কথা এই যে, এরা লিখতে জানত। প্রথমে চিত্রের, তারপর বর্ণমালার সাহায্যে। ক্রীট-সভ্যতার পতনের মূলে গ্রীকরা। তারাই এই সভ্যতা ধ্বংস করে ধনরত্ন লুণ্ঠন করে নিজেদের দেশে নিয়ে আসে। এই সময় থেকে সমগ্র গ্রীসবাসীরা একতাবদ্ধ হতে শুরু করে। একেই ইতিহাসে **মাইসিনীয় সভ্যতা** বলা হয়। মাইসিনীয়রা ক্রীটদের কাছ থেকে বর্ণমালা গ্রহণ করেছিল। তখন সাধারণের ভাষা গ্রীক হলেও রাজকার্যে ক্রীট ভাষা ব্যবহৃত হতো বলে জানা যায়। মাইসিনীয় সভ্যতা বেশী দিন স্থায়ী হয়নি,—খ্রীস্টপূর্ব দ্বাদশ শতাব্দীতে এর পতন হয়।

হোমারের মহাকাব্যে ট্রয় ধ্বংসের যে কাহিনী আছে, তা এই সময়কার বলে অনুমান করা হয়। ট্রয়ের রাজকুমার প্যারিস ছিল ফিনিসীয়, আর মাইসিনীয় অধিপতি আগামেননের ভ্রাতা মেনেলাসের পত্নী ছিল হেলেন। গ্রীকরা সমগ্র ট্রয় নগরী ধ্বংস করেছিল বটে, কিন্তু মাইসিনীয় সভ্যতাকে রক্ষা করতে পারেনি।

হোমারের বর্ণনা থেকে ওই যুগের যে সামাজিক ও রাজনৈতিক জীবনের পরিচয় পাওয়া যায়, তাতে দেখা যায় সমাজ জীবনে পরিবারের প্রভূত ক্ষমতা ছিল,—এক একটি কৌম (small tribe) নিয়ে গড়ে উঠত পরিবার। পরিবারের প্রাণদণ্ড দেবার মত ক্ষমতা ছিল। আসলে এরাই ছিল রাষ্ট্রের প্রাণ। লোকের বিশ্বাস ছিল রাজা দেববংশোদ্ভূত। তিনি ছিলেন প্রধান পুরোহিত, প্রধান বিচারক ও সেনাপতি। কৌমের সব ধর্মীয় অনুষ্ঠান পরিচালনা করতেন রাজা। নৌ-দস্যুতা

জীবিকা অর্জনের ছিল প্রধান উপায় ; আর তা সমাজে নিন্দিত বা দূষণীয় বলে গণ্য হতো না।

মাইসিনীয় সভ্যতার পতনের পর গ্রীকরা সমগ্র **ঈজিয়ান** অঞ্চলে ছড়িয়ে পড়ল। ব্রোঞ্জ যুগের শেষ হলো, লৌহ যুগের সূচনা হলো। কিন্তু গ্রীস আবার নতুন এক আক্রমণকারীদের হাতে পড়ল,—**ডোরীয়** আক্রমণ শুরু হলো। ডোরীয়রা প্রথমে পিডনা, ম্যাসিডনে বসতি স্থাপন করে ক্রমে ক্রমে ডোরাস ও পেলোপোনেসাস অঞ্চলে ছড়িয়ে পড়ল। এই ডোরীয়রা নতুন গ্রীস গঠনে প্রভূত সাহায্য করেছিল।

মাইসিনীয় যুগে গ্রীকরা ব্যবসা-বাণিজ্যের কারণে ভূমধ্যসাগরের সর্বত্র ঘুরে বেড়াত ; তার উপর জল-দস্যুতা তো ছিলই। এইভাবে তারা সিরিয়া, মিশরের সঙ্গে যোগাযোগ স্থাপন করে। কিন্তু এই সভ্যতার পতনের পর এই সংযোগ ছিন্ন হয়। প্রায় চার শ' বছর পরে ফিনিসীয়রা আবার এই যোগাযোগ ও ভাবের আদান-প্রদানের দ্বার মুক্ত করে। ফিনিসীয়রা ছিল বর্তমান লেবানন ও সিরিয়ার অধিবাসী। এই জাতি ব্যবসা-বাণিজ্যে উন্নত ছিল। এদের সর্বশ্রেষ্ঠ অবদান **'বর্ণমালা'**। গ্রীকরা তাদের বর্ণমালার জন্য ফিনিসীয়দের নিকট মহাঋণে আবদ্ধ। ফিনিসীয়দের বর্ণমালার বর্ণ সংখ্যা ছিল 22টি, কিন্তু সবই ব্যঞ্জনবর্ণ—স্বরবর্ণ ছিল না। গ্রীক চরিত্রের বড় কথা, তারা যা গ্রহণ করে তার উন্নতি ও পরিপূর্ণতা আনে। গ্রীকরা ফিনিসীয় ব্যঞ্জনবর্ণ গ্রহণ করে স্বরবর্ণ সংযোগ করে। খ্রীস্টপূর্ব নবম শতাব্দী থেকে তারা এই বর্ণমালার সাহায্যে কবিতা রচনা করতে থাকে।

গ্রীসের প্রাচীন ইতিহাস খুব স্পষ্ট নয়। নানা সময় নানা জাতির আক্রমণ ঘটেছে,—ভাঙা-গড়ার খেলা চলেছে। সম্রাট দারিয়ুসের সময় থেকে সমগ্র গ্রীসে স্থিতিশীলতার অনুকূল আবহাওয়া ও পরিবেশ দেখা যায়। সম্রাট দারিয়ুস নানা দেশের সঙ্গে স্থলপথে যোগাযোগ স্থাপন করার পথ সুগম করেছিলেন। এই সময় থেকেই আয়োনীয়রা বাণিজ্যিক ব্যাপারে বিশেষ লাভবান হতে থাকে,—পারসিক সাম্রাজ্যের বিভিন্ন অংশের সুবিন্যস্ত রাজপথ বাণিজ্যকে আরো প্রসারিত করে ; দীর্ঘ 1500 মাইল রাজপথ **সারডিস** থেকে **সুসা** পর্যন্ত নির্মিত হলো ; আর দারিয়ুস স্বর্ণমুদ্রা ডেরিক (**Daric**) প্রবর্তন করে গ্রীসের বিনিময়ে এনে দিলেন বিশেষ সুবিধা। এই বিশাল রাজপথ ও তার নানা শাখা-প্রশাখা মধ্যএশিয়া ও ঈজিয়ান সাগরের মধ্যে দূরত্ব হ্রাস করে যে নতুন সম্ভাবনার দ্বার খুলে দিল, সেই সুযোগ পুরোপুরি গ্রহণ করল গ্রীকরা। আয়োনীয়ার **মিলেটাস**-কে কেন্দ্র করে গড়ে উঠল বিশাল ও গুরুত্বপূর্ণ এক বাণিজ্য কেন্দ্র। প্রাচীন গ্রীসের নগর ও বাণিজ্য কেন্দ্রগুলি সমুদ্রের উপকূলবর্তী ছিল না। সে কারণে ব্যবসা-বাণিজ্যে তখন তেমন উন্নতি করতে পারেনি। কিন্তু ক্রমে ক্রমে এশিয়া মাইনরের পশ্চিম ও গ্রীসের পূর্ব উপকূলে গড়ে উঠল বহু নগর ও ব্যবসা-বাণিজ্য-কেন্দ্র।

প্রাচীন গ্রীকদের কাছে সহসা ভৌগোলিক জ্ঞানের পরিধি বিস্তৃত হলো। প্রাচীন

গ্রীসে নীলনদ ও দানিয়ুব নদীকে একই দ্রাঘিমা রেখায় কল্পনা করা হতো, আর তারই ভিত্তিতে মানচিত্র অঙ্কিত হতো। দানিয়ুব নদীকে উত্তর-দক্ষিণ বাহিনী



চিত্র—১

বলে মনে করে দ্রাঘিমা রেখা সিনোপি-র (Sinope) ওপর দিয়ে কল্পিত হতো। কিন্তু এই ভ্রান্ত ধারণার নিরসন হলো দীর্ঘ রাজপথ নির্মাণের সুবিধায়। এই

রাজাপথকেই তারা বিষুবরেখার মতো কল্পনা করে তার সাহায্যে মানচিত্র অঙ্কন করে ভৌগোলিক জ্ঞানের নতুন দিগন্ত উন্মোচন করল। এই সম্পর্কে এক গ্রীক ইতিহাসবেত্তা লিখেছেন,—"খৃঃ পূঃ ষষ্ঠ শতাব্দীর শেষ ভাগে আইওনীয়াতে যে সমস্ত গ্রীক ভূগোলবেত্তার আবির্ভাব হইয়াছিল, তাঁহাদের নিশ্চিত ধারণা ছিল যে, ভূপৃষ্ঠের গঠন সুসমঞ্জস। প্রথমতঃ তাঁহাদের জানিত পৃথিবীর ক্ষুদ্র অংশ সম্বন্ধেও তাঁহাদের জ্ঞান ছিল প্রমাদপূর্ণ এবং সীমিত। দ্বিতীয়তঃ তাঁহারা অঙ্কশাস্ত্রের ধারা মত সরল রেখার মাধ্যমে মানচিত্র অঙ্কন করিতে গিয়াছিলেন, এই জন্যই তাঁহাদের অঙ্কিত মানচিত্র বৈজ্ঞানিক জ্ঞানসম্পন্ন বর্তমান যুগের মানুষের নিকট হাস্যোদ্দীপক বলিয়া মনে হইবে। কিন্তু ইহাও স্বীকার করিতে হইবে মাইলেটাসবাসী এনাক্সিম্যানডার (**Anaximander**) এবং হেকাটস (**Hecataeus**) প্রমুখ গ্রীকগণের জ্ঞানানুসন্ধান এবং বিজ্ঞান চর্চা যে কতখানি প্রশংসনীয় ছিল তাহা বলিয়া শেষ করা যায় না,—তাঁহারা ছিলেন এ বিষয়ে পথিকৃৎ।"[১]

আয়োনিয়াই গ্রীক জ্ঞান-বিজ্ঞানের সূতিকাগৃহ। শুধু ইউরোপ কেন, সমগ্র বিশ্ব আয়োনিয়ার মনস্বী জ্ঞান তপস্বীদের নিকট মহাঋণে আবদ্ধ। জ্ঞান-বিজ্ঞানের নানান ক্ষেত্রে বুদ্ধি ও যুক্তির অসি চালনা করে এঁরা নতুন নতুন তথ্য আবিষ্কার করলেন। একদিকে চলছিল পরাবিদ্যার অনুশীলন, অন্যদিকেও প্রত্যক্ষ জ্ঞান লাভের প্রয়াস অব্যাহত ছিল। কেবলমাত্র আধ্যাত্মিক জ্ঞান নয়, তার সঙ্গে বৈজ্ঞানিক গবেষণা যুক্ত হয়ে গ্রীক জাতির মনে এক নতুন দৃষ্টিভঙ্গী গড়ে তুলতে সমর্থ হয়েছিল। অ্যানাক্সামিণ্ডার কেবল মানচিত্র অঙ্কনই করেননি, তিনি পদার্থবিদ্যার গবেষণায় আত্মনিয়োগও করেছিলেন। বিজ্ঞানী ও গণিতজ্ঞ থ্যালেসের তুলনা মেলা ভার। তিনি একাই একটি প্রতিষ্ঠান। তাঁর কথা আমরা পরে যথাসম্ভব বিস্তারিতভাবে আলোচনা করব। আর ছিলেন গ্রীক ইতিহাসের জনক **হেকাটস**। তিনি হেসিডীয় (**Hesiodic**) সম্প্রদায়ের কল্পিত ও কুসংস্কারচ্ছন্ন ধর্মীয় মতবাদকে তীব্রভাবে আক্রমণ করে সমালোচনা করেছিলেন। তাঁর এই নির্ভীক গ্যালেলিওসুলভ মনোভাব প্রকৃতপক্ষে সেই সপ্তম-ষষ্ঠ খ্রীস্ট-পূর্বাব্দে অভাবনীয় বলেই মনে হয়। তিনি পৌরাণিক উপাখ্যানের 'দেবপুত্র'-সম বীরবৃন্দকে '**অবৈধ সন্তান**' বলে মনে করতেন। তিনি বলতেন, এদের স্রষ্টা মাতারা নিজেদের কলঙ্ক ঢাকবার জন্যে জিউস বা অ্যাপোলো দেবতাকে এদের পিতা বলে সাজিয়েছে। আমাদের দেশেও এমন কাহিনীর শেষ নেই। কিন্তু ধর্মীয় শাস্ত্রের আবরণে সেগুলি এমনভাবে ঢেকে রাখা হয়েছে যে, সে-সব কাহিনীর বিরুদ্ধে কিছু বলা মানে আগ্নেয়গিরির বিস্ফোরণ। বস্তুতপক্ষে, আমাদের দেশে একজন হেকাটস জন্মেছেন কিনা সন্দেহ,—এখনো নয়। যাই হোক,—হেকাটসের বক্তব্য কেবল তাঁর একার অভিমত বলে মনে না করার যথেষ্ট কারণ আছে।

১. প্রাচীন গ্রীসের ইতিহাস—রেবতীমোহন লাহিড়ী, পৃ—39

আমাদের মনে হয়, তখন সমগ্র আয়োনীয় মনস্বীদের এই একই রকম অভিমত ছিল। সপ্ত ঋষির অন্যতম থ্যালেস যে তাঁদের একজন তাতে সন্দেহ নেই।

হেকোটস ও আয়োনীয় জ্ঞান তপস্বীদের সম্পর্কে ডঃ লাহিড়ী যথার্থ মন্তব্য করেছেন। তিনি লিখেছেন,—"আমরা অন্ধ বিশ্বাসের বিরুদ্ধে প্রজ্ঞার জয়ের সূচনা দেখিতে পাইতেছি। এ বিষয়ে হেকটাস ছিলেন প্রথম প্রদর্শক। অবশ্য প্রজ্ঞার বিজয়কেতন আরও উর্ধ্বে তুলিয়া ধরিয়াছিলেন তাঁহার সমসাময়িক আরও একজন আইওনীয়াবাসী—তাঁহার নাম ছিল জেনোফোন (**Zenophone**)। তিনি ছিলেন কোলোফোনের অধিবাসী।"[২] কেবল আরো একজন কেন, অনেকেই ছিলেন। ইতিহাসে তার আর সাক্ষ্য নাই, কিন্তু থ্যালেস ও তাঁর শিষ্যরা তো ছিলেন।

আয়োনীয় দার্শনিক চিন্তাধারা অরফীয় ধর্মমতের (**Orphic Religion**)* রাহুগ্রাস থেকে গ্রীসকে রক্ষা করেছিল। কেন যে আয়োনীয় অঞ্চলে একটি স্বাধীন মুক্ত দার্শনিক চিন্তাধারার সূত্রপাত হলো, তা বড়ই বিস্ময়কর। তবে ঐতিহাসিকরা এর দু-একটি কারণ দেখিয়েছেন ঃ এক, আয়োনিয়ায় কোন পুরোহিততন্ত্র ছিল না ; দুই, সৃষ্টিকর্তা ভগবানের অস্তিত্ব সেখানে ছিল না। আজগুবি ও অবৈজ্ঞানিক সৃষ্টিতত্ত্বের প্রচলন না থাকায় এখানে মানুষের চিত্ত ভয়শূন্য ছিল, উচ্চ ছিল শির, জ্ঞান ছিল মুক্ত এবং এখানে তুচ্ছ আচার এবং অন্ধ বিশ্বাসের মরুবালুরাশি বিচার-বুদ্ধির স্রোতধারাকে গ্রাস করতে পারেনি। এই অনুকূল পরিবেশের বিকাশ খ্রীস্টপূর্ব সপ্তম শতাব্দীর শেষ দিক থেকে দেখতে পাওয়া যায়।

জ্ঞান-বিজ্ঞানের বিকাশ ও সমৃদ্ধিতে পীথাগোরাসের নাম শ্রদ্ধার সঙ্গে স্মরণীয়, —বিশেষ করে গণিতে এই সম্প্রদায়ের উল্লেখযোগ্য অবদান আছে। কিন্তু পীথাগোরাস স্বয়ং সর্বনাশা অরফীয় ধর্মমতের দ্বারা প্রভাবিত হয়ে এক রহস্যবাদী সম্প্রদায় গড়ে তোলেন। বিজ্ঞান ও দর্শনে সমন্বয় ঘটানোর প্রয়াস পেয়েছিলেন, কিন্তু পারেননি। সাধারণ মানুষ ও ক্ষুদ্র এক দার্শনিক গোষ্ঠী রহস্যবাদিতায় বিশ্বাস করলেও তথাকার বৃহৎ মনস্বী-সমাজ বিশ্বাস করেননি। এঁদের মুখপাত্র রূপে দেখা দিলেন জেনোফেন ও হেরাক্লিটাস (**Heraclitus**)।

জেনোফেন প্রথম আঘাত হানলেন সনাতনী ধর্মের বিরুদ্ধে, আর দেবতাবাদের অসার ও অযৌক্তিক, কাল্পনিক অংশ তুলে ধরলেন জনসমাজে। তিনি বললেন, মানুষ নিজেদের আকৃতি অনুসারেই দেবতাদের মূর্তি কল্পনা করেছে। দর্শনের যুক্তি ও ন্যায় উপস্থাপিত করে তিনি বললেন, "সিংহ, ঘোড়া, ষাঁড় ইত্যাদিরা যদি

২. প্রাচীন গ্রীসের ইতিহাস—রেবতীমোহন লাহিড়ী, পৃঃ—40

* কবি ও পুরোহিত অরফিয়াস -এর (**Orpheus**) নাম অনুসারে এরকম নামকরণ হয়। আমাদের দেশের তান্ত্রিক ভৈরবীচক্র, বিকৃত সহজিয়া মতবাদের সঙ্গে তুলনীয়।

দেবতাদের মূর্তি গড়তে পারত, তা হলে তা যথাক্রমে সিংহ, ঘোড়া, ষাঁড়-ই হতো"। জেনোফেনের দর্শনও দেবতা আশ্রিত ছিল, কিন্তু এ দেবতা আকারে ও মনে মানুষের প্রতিবিম্ব নয়। এই দেবতা ছিল সমগ্র বিশ্বপরিব্যাপ্ত, তাঁর প্রকাশ ছিল সর্বত্র, আর তাঁর মধ্যেই ছিল ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র দেবতাদের স্থান। অর্থাৎ সাকার নয়, নিরাকার দেবতা ছিল জেনোফেনের দেবতা। এইভাবে গ্রীকজাতি ক্রমে ক্রমে মূর্ত থেকে বিমূর্ত চিন্তনের দিকে অগ্রসর হতে লাগল। তাঁর সুতীক্ষ্ণ যুক্তিজালে সাধুসন্ত, এমন কি কবি হোমার ও হেসিওডও জড়িয়ে পড়লেন। অরফীয় ধর্মমত নস্যাৎ করলেন, পুরোহিততন্ত্রের ভণ্ডামীর সুযোগ খুলে দিলেন, সর্বপ্রকার কুসংস্কার ও অন্ধবিশ্বাসের মূলোচ্ছেদ করলেন। গ্রীকজাতি এই সজীব, সতেজ ও প্রবাহমান দার্শনিক মতবাদ পেয়ে প্রগতিশীল চিন্তাধারায় সঞ্জীবিত হয়ে উঠল,—সমস্ত কিছুকে বিজ্ঞানের ভিত্তিতে যাচাই করার প্রবণতা পেল।

এফিসাসের হেরাক্লিটাস ছিলেন '**পরিবর্তনবাদ**-এর **(Doctrine of the flux)** উদ্‌গাতা। তাঁর এই মতবাদ পরবর্তীকালের দার্শনিক ও ভাবুকদের প্রভাবিত করেছিল। এই মতবাদের মূল কথা হলো, সব পদার্থ পরিবর্তনশীল,—আমাদের অস্তিত্ব পর্যন্ত পরিবর্তনশীল। বৌদ্ধধর্মের ক্ষণিকবাদের মত '**আমরা আছি**' এবং **আমরা নাই**' আমাদের অস্তিত্ব সম্পর্কে তাঁর বক্তব্য। এই পরিবর্তন নিয়ম মেনে চলে,—প্রকৃতিরও ছন্দ আছে, নিয়ম আছে। কেবল পরিবর্তনবাদ নয়, তিনি **আপেক্ষিকবাদ**-এরও (**Doctrine of Relativity**) প্রবর্তন করেন। তাঁর কথা : **ভাল ও মন্দ একই গুণবিশিষ্ট**।

পারমেনাইডিস[৩] ও হেরাক্লিটাস প্রকৃতপক্ষে অধিবিদ্যার (**Metaphysics**) জনক ছিলেন। জ্ঞান-বিজ্ঞানের আলোচনায় স্বাভাবিকভাবেই দার্শনিক মতবাদ আসে। কারণ, দর্শনের অনুশীলনের মাধ্যমেই প্রাচীন কালের মানুষ এমন কতকগুলি প্রত্যয় (**Concept**) ও প্রতীতি (**Conception**) লাভ করেছিল যা জ্ঞান-বিজ্ঞানের সব শাখায় প্রযোজ্য। দর্শনানুশীলনের মাধ্যমে অসত্য ও অজ্ঞানতার, কুসংস্কার ও অন্ধ বিশ্বাসের প্রকৃতি ও স্বরূপ উদ্‌ঘাটিত হলো। প্রকৃত সত্য কি এবং কিভাবে তা লাভ করা যায় তার পথনির্দেশ দর্শনের মাধ্যমেই পাওয়া গেল। বস্তুতপক্ষে, গ্রীক গণিতের যে খ্যাতি, গৌরব ও ঐতিহ্য তার পশ্চাতে রয়েছে সে-যুগের দার্শনিকদের অসামান্য অবদান, আর বহু গণিতজ্ঞ তো একাধারে গণিতজ্ঞ ও দার্শনিকই ছিলেন। নিউটনের সময় ও তার পরেও বিজ্ঞান **Natural Philosophy** বলে আখ্যাত হতো।

একথা সত্য, যুদ্ধে রক্তক্ষয়ের মাধ্যমে জয় আসে, শান্তি ফিরে আসে, অনুকূল আবহাওয়ার সৃষ্টি হয়। কিন্তু একটি যুদ্ধ আবার নতুন যুদ্ধের সূচনা করে, এক যুদ্ধে সবকিছুর পরিসমাপ্তি ঘটে না। কিন্তু আয়োনীয় জ্ঞান তপস্বীরা বিনা

৩. পারমেনাইডিসের মতবাদ জেনো প্রসঙ্গে দ্রষ্টব্য।

রক্তপাতে যে যুদ্ধ জয় করেছিলেন, গ্রীক জাতির জীবনে তার সুদূরপ্রসারী প্রভাব পড়েছিল। কেবল গ্রীস তখনকার মত সংকট ও প্রতিকূল আবহাওয়া কাটিয়ে ওঠেনি, রাজনৈতিক ও সামাজিক জীবনে যে বিপ্লব সূচনা করেছিল, তার ফলেই আজ গ্রীস বিশ্বসভায় বন্দিত হচ্ছে। বস্তুত, খ্রীস্টপূর্ব ষষ্ঠ শতাব্দী গ্রীসের ইতিহাসে একটি যুগ-সন্ধিক্ষণের যুগ। হয় উত্থান, না হয় পতন। খুব সম্ভব, বিশ্বসভ্যতায় গ্রীস নবীন সভ্যতা বলে এই সঙ্কটময় মুহূর্ত কাটিয়ে উঠতে পেরেছিল। সৌভাগ্য-বশত সেই সময় গ্রীসে সপ্ত ঋষির[৪] আবির্ভাব ঘটে। তাঁদের অনন্যসাধারণ মনীষা ও প্রজ্ঞার আলোকে গ্রীসে যে প্রাণচাঞ্চল্য দেখা দিল, তা বহু শতাব্দীব্যাপী নব নব প্রতিভা ও মনীষার জন্ম দিল,—গ্রীসে স্বর্ণ যুগের সূচনা করল।

পারসিক যুদ্ধের পর গ্রীসে একদিকে রাজনৈতিক পরিবর্তন ঘটতে থাকে, আর অপর দিকে সংস্কৃতি ও ঐতিহ্যের নব নব যুগের সূচনা হতে থাকে। রাজনৈতিক জগতে দেখা গেল কাইমন, পেরিক্লিস ও নিকিয়াস—অ্যালকিবায়-ডিসের যুগ; সংস্কৃতির জগতে এল ইসকাইলাস, সোফোক্লিস-ফিডিয়াস ও ইউরিপিডিস-অ্যারিস্টোফেনিস-সক্রেটিসের যুগে। আয়োনিয়া থেকে জ্ঞান-বিজ্ঞান চর্চার কেন্দ্র ক্রমশ এথেন্সে স্থানান্তরিত হতে শুরু করল। তখনো আয়োনীয়া ও সিসিলির প্রতিভা শুষ্ক হয়ে যায়নি সত্য, কিন্তু এথেন্স ক্রমশ জ্ঞান-বিজ্ঞান চর্চার কেন্দ্র হয়ে উঠতে থাকল। এই প্রসঙ্গে সিসিলির সভাকবি **পিণ্ডার** ও আয়োনীয় কবি **সিমনাইডিস**-এর নাম করা যেতে পারে। গ্রীক জীবনে এই দুই কবির প্রভাব সম্পর্কে বলা যায়, এঁরা কেবল "ছন্দ, যতি, তান, লয়, মান ইত্যাদির সাহায্যে কবিতার উৎকর্ষ সাধন করেন নাই, গ্রীক-মানসে উন্নতির ধারারও ইঙ্গিত দিয়া গিয়াছেন। যেমন সুষম ছন্দ কবিতাকে বাঁধে, তেমনি সুষম জীবনযাত্রার পক্ষেও দরকার মিতাচারের। কবিতা রচনার মাধ্যমে তাঁহারা ভাবী সমাজকে এই মহতী শিক্ষা দিয়া গিয়াছেন।"[৫]

ইসকাইলাস (**Aeschylus**) বিয়োগান্ত নাটকের নব রূপায়ণ ঘটালেন। তাঁর কৃতি সক্রেটিসের পর্যন্ত প্রশংসা পেয়েছিল। কাইমনের যুগে সাহিত্য ছাড়া আর কোন বিষয়ে তেমন উল্লেখযোগ্য পরিবর্তন সাধিত হয়নি,—বিশেষ করে জ্ঞান-বিজ্ঞানের প্রতি এথেন্সের তেমন আনুকূল্য দেখতে পাওয়া যায় না। পরবর্তী পেরিক্লিসের সময় সাহিত্য, সংস্কৃতি, চারুকলা, জ্ঞান-বিজ্ঞানের নানা দিকে উৎকর্ষ সাধনের প্রয়াস দেখা যায়। এ-সবের মধ্যমণি ছিলেন পেরিক্লিস স্বয়ং। এই সময় সাহিত্য ক্ষেত্রে দেখা দিলেন সফোক্লিস ও ইউরিপিডিস, চারুকলায় ফিডিয়াস ও ইকটিনাস, আর ওই সময় বিখ্যাত বৈজ্ঞানিক অ্যানাক্সাগোরাসেরও আবির্ভাব।

৪. থ্যালেস, সোলোন, পেরিয়াণ্ডার, চিলন, বিয়াস, ক্লিওবুলাস ও পিট্টাকাস সপ্তঋষি বলে কথিত।

৫. প্রাচীন গ্রীসের ইতিহাস—রেবতীমোহন লাহিড়ী, পৃ—209

পেরিক্লিস এথেন্সবাসীদের কুসংস্কার, অন্ধ বিশ্বাস ও ধর্মান্ধতা সম্পর্কে সম্পূর্ণ পরিচিত ছিলেন। তাই তিনি বৈজ্ঞানিক তথ্য ও তত্ত্বের ভিত্তিতে তাদের মানসিকতা পরিবর্তনের প্রয়াসও পেয়েছিলেন। কিন্তু এথেন্সের তখনকার আবহাওয়া সম্পূর্ণ প্রতিকূল ছিল। সেইজন্য পরে তাদের পুরোপুরি মাশুল গুনতেও হয়েছিল।

আয়োনীয় দর্শন বিশ্ব সংগঠনের মৌলিক উপাদান আবিষ্কারে নিযুক্ত ছিল। কিন্তু পঞ্চম শতাব্দীতে গবেষণার ক্ষেত্র অন্য দিকে প্রসারিত হলো। মৌলিক উপাদান আবিষ্কারের চেয়ে ওই সব উপাদানের গঠন, গতি ও পরিবর্তনের কারণ অনুসন্ধানে ব্যাপৃত হলো। অ্যানাক্সাগোরাস তাঁর তত্ত্বে বললেন, সব মৌলিক পদার্থে জড়িত নানা রকমের উপাদান ; অন্য একটি পদার্থ দ্বারা চালিত হয়ে এই উপাদনগুলি যথাযথ স্থানে সন্নিবেশিত হয়েছে ; আর ক্রমশ বিভাজন ও সংযোজন (**separations and conjunctions**) দ্বারা এগুলি নানাভাবে রূপায়িত হচ্ছে, হয়েছে এবং অনন্তকাল ধরে এ রকমই চলবে। মহান পেরিক্লিসের গুরু অ্যানাক্সাগোরাস এথেন্সে এসে একটি আলোচনা চক্র গড়ে তুললেন। এই চক্রে যোগ দিতেন পেরিক্লিস স্বয়ং, অমর নাট্যকার ইউরিপিডিস আর প্রখ্যাত ঐতিহাসিক থুকিডাইডিস। শুধু তাই নয়, পেরিক্লিস তাঁর গৃহেও জ্ঞানীগুণী সম্মেলন করতেন। এই সম্মেলনে প্রধান ভূমিকা পালন করতেন পেরিক্লিস প্রণয়িনী **অ্যাসপেসিয়া**। এই বিদুষী মহিলার বক্তৃতা শুনে নাকি সক্রেটিস পর্যন্ত মুগ্ধ হয়েছিলেন। যাই হোক, এই সম্মেলনে যোগ দিতেন **অ্যানাক্সাগোরাস**, দার্শনিক জেনো, **সক্রেটিস**, ঐতিহাসিক **হেরোডোটাস**, **সফোক্লিস**, শিল্পী **ফিডিয়াস**, **ক্যালিক্রেটিস**, সুপণ্ডিত **হিপোডেমাস**, সঙ্গীতজ্ঞ **ড্যামোন** আর মহাপ্রাজ্ঞ **ল্যাম্পন**।

গ্রীসের ইতিহাসে পেরিক্লিস নিঃসঙ্গ, একক ও অনন্য। এথেন্সবাসীরা তাঁকে সম্মান করত, শ্রদ্ধা করত, তাঁর কথায় প্রাণ দিতে তাদের কুণ্ঠা ছিল না। কিন্তু তারা পেরিক্লিসের বৈজ্ঞানিক যুক্তিবাদ মেনে নিতে পারেনি। তাই পেরিক্লিসের মৃত্যুর পর গ্রীসের সর্বশ্রেষ্ঠ সন্তানদের স্থান এথেন্সে হয়নি,—তাঁদের অন্যত্র গিয়ে শেষ জীবন যাপন করতে হয়েছে। অ্যানাক্সাগোরাস, সক্রেটিস, অ্যারিস্টটল প্রমুখের বিরুদ্ধে অভিযোগ ছিল এঁরা নাস্তিক। অ্যারিস্টটল, ইসকাইলাস ও ইউরিপিডিসকে জন্মভূমি পরিত্যাগ করতে হয়েছিল ; আর সক্রেটিস যুবকদের বিপথে চালিত করছেন এই অভিযোগে তাঁর চরম দণ্ড হয়েছিল।

স্বাধীন মুক্ত চিন্তন ও মননশীলতা, যুক্তিবাদের অনুশীলন, আর বৈজ্ঞানিক আলোচনা এথেন্সে নিষিদ্ধ ছিল। এমন কি, আইনের সাহায্যে পঞ্চাশ বছর যাবৎ জ্যোতির্বিজ্ঞানের গবেষণা ও চর্চা নিষিদ্ধ হয়। তবে সুখের কথা, এথেন্স যদিও গ্রীসের প্রতিভূস্বরূপ ছিল,—তবুও এথেন্সই সমগ্র গ্রীস ছিল না। গ্রীসের অন্যত্র বিজ্ঞানের অনুশীলন হতো, যুক্তিবাদের সাহায্যে দর্শন ও গণিতে সত্যানুসন্ধান

সক্রেটিসের মতবাদ এথেন্সে জনগণের মুখে মুখে প্রচারিত হতে লাগল। গ্রীকসভ্যতা প্রজ্ঞার আলোকের নিশানায় আরো এক ধাপ এগিয়ে গেল।

এতক্ষণ আমরা ইতিহাসের পটভূমিকায় গ্রীক জাতির উদ্ভব ও তার সভ্যতা ও সংস্কৃতির উদ্ভব, বিকাশ ও সমৃদ্ধির অতি সংক্ষিপ্ত রূপরেখা দেবার প্রয়াস পেয়েছি মাত্র। বস্তুত এ আলোচনা আলোচনা নয়,—দু-একটি সূত্রের গ্রন্থনা মাত্র। গ্রীসের ইতিহাস যেমন জটিল, তেমনি এর অস্পষ্টতাও আছে। গ্রীক গণিতের গতি-প্রকৃতি, স্বরূপ, উদ্ভব ও বিকাশ সম্বন্ধে সামান্য ধারণা করতে গেলে এই জাতির ইতিহাস সম্বন্ধে অতি ক্ষুদ্র হলেও সামান্য জ্ঞানের প্রয়োজন। তাই এই উপক্রমণিকা ও প্রস্তাবনা।

গ্রীক গণিতের রূপরেখা

গ্রীক গণিতের উদ্ভব ও বিকাশের সঙ্গে জড়িয়ে আছেন নানা বরেণ্য গণিতজ্ঞ আর নানা প্রতিষ্ঠান। আমাদের সংক্ষিপ্ত ইতিহাসে সবার সব কৃতির পরিচয় লিপিবদ্ধ করা সম্ভব নয়; কেবল প্রধান প্রধান গণিতজ্ঞ ও বিশ্বখ্যাত প্রতিষ্ঠান-গুলির সংক্ষিপ্ত পরিচয় দেওয়ার প্রয়াস করব। আমরা প্রধানত গণিতজ্ঞদের জীবনী ও তাঁদের গণিতে অবদান বিষয়ে আলোচনা সীমাবদ্ধ রেখেছি। যদিও ঐতিহাসিক ক্রমটি রক্ষা করার প্রয়াস আছে, তবুও কোথাও কোথাও অনিবার্য কারণে এর ব্যতিক্রম আছে। বিভিন্ন যুগে গ্রীক গণিতের যে বৈশিষ্ট্য ও চরিত্রটি দেখা যায়, তা আলোচনার সুযোগ আমাদের পরবর্তী মূল পর্বে ঘটেনি। তাই এখানে বিভিন্ন গণিতজ্ঞদের বৈশিষ্ট্য ও বিভিন্ন যুগ-বৈচিত্র্য ও বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে দু-চার কথা বলার প্রয়োজন দেখা দিয়েছে। প্রকৃতপক্ষে এই আলোচনা মোটেই পর্যাপ্ত নয়,—সংক্ষিপ্ত পরিচিতি মাত্র।

গ্রীসের ইতিহাস প্রায় 4800 বছরের পুরানো হলেও গণিতের ক্ষেত্রে গ্রীসের অবদান খ্রীস্টপূর্ব সপ্তম শতাব্দীর আগে দেখা যায় না। প্রধানত মিশর ও ব্যাবিলনের সঙ্গে ব্যবসা-বাণিজ্য ও ভ্রমণের মাধ্যমে গ্রীকসভ্যতা গড়ে উঠতে থাকে। যদিও এসবের তেমন উল্লেখযোগ্য প্রামাণিক গ্রন্থাদি নেই, তবুও নানা গ্রন্থে উল্লেখ থেকে দেখা যায়, সেই প্রাচীন যুগে বহু ভ্রমণবিলাসী ও জ্ঞানপিপাসু গ্রীক অধিবাসী মিশরে গিয়ে অধ্যয়ন করেছেন, কেউ কেউ ব্যাবিলনে গিয়ে বিজ্ঞান ও গণিত শিক্ষাও করেছেন। তারপর তাঁরা নিজ নিজ দেশে ফিরে এসে এক একটি বিদ্যাশিক্ষার প্রতিষ্ঠান খুলেছেন। আবার এইসব প্রতিষ্ঠান থেকেই প্রতিভাবান ছাত্ররা গ্রীসের অন্যত্র নতুন নতুন প্রতিষ্ঠান স্থাপন করে বিদ্যাশিক্ষার কেন্দ্র গড়ে তুলেছেন।

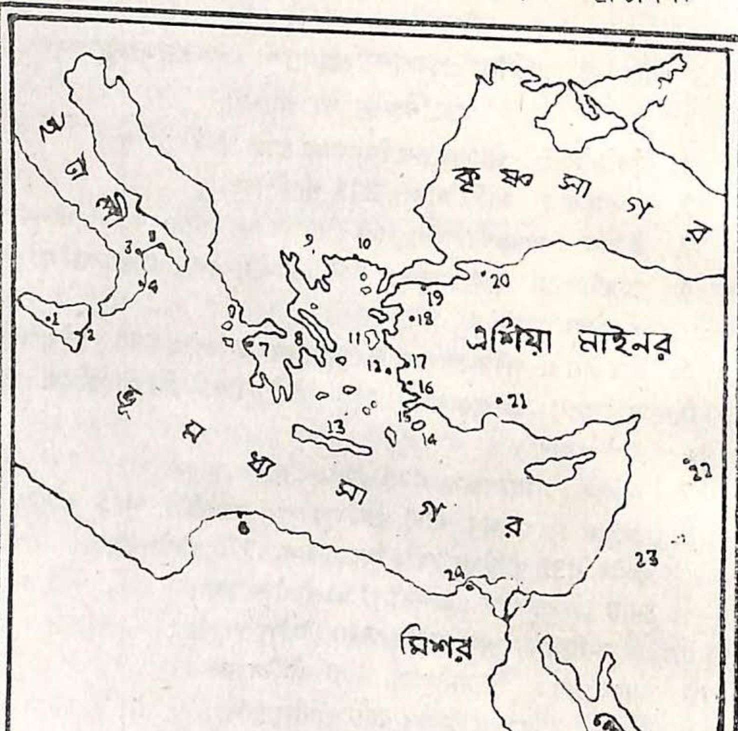
গণিতের ইতিহাসের দিক থেকে বিচার করলে গ্রীক সভ্যতাকে মোটামুটি তিন ভাগে ভাগ করা যায়ঃ **ক্লাসিক্যাল যুগের সূচনা পর্ব**, **ক্লাসিক্যাল যুগ**

ও আলেকজান্দ্রিয় যুগ। ক্লাসিক্যাল যুগের সূচনা পর্ব হচ্ছে থ্যালেস থেকে পীথাগোরাস-এর সময়কাল পর্যন্ত ; ক্লাসিক্যাল যুগ পীথাগোরাসের পর থেকে আলেকজান্দ্রিয়ায় বিশ্ববিদ্যালয় স্থাপনের পূর্ব পর্যন্ত, আর আলেকজান্দ্রিয় যুগ পরবর্তীকাল পর্যন্ত বিস্তৃত। অর্থাৎ 300 খ্রীস্টপূর্বাব্দ থেকে প্রায় পঞ্চম শতাব্দী পর্যন্ত।

গণিত চর্চার প্রধান প্রধান কেন্দ্রসমূহের সংক্ষিপ্ত পরিচয়

1. সিসিলি : **ডায়োডরাস সিকুলাস**, প্রথম খ্রীস্টপূর্বাব্দ।
2. সিরাকুজ : **আর্কিমিডিস**, 225 খ্রীস্টপূর্বাব্দ।
3. ইলিয়া : **পারমেনাইডিস**, 460 খ্রীস্টপূর্বাব্দ ; **জেনো**, 450 খ্রীস্টপূর্বাব্দ।
4. ক্রোটোনা : **পীথাগোরাস**, 540 খ্রীস্টপূর্বাব্দ ; **ফিলোলাউস**, 425 খ্রীস্টপূর্বাব্দ।
5. টরেন্টাস : **পীথাগোরাস**, **ফিলোলাউস**, **আর্কিটাস** 400 খ্রীস্টপূর্বাব্দ।
6. সাইরেন : **থিওডোরাস**, 425 খ্রীস্টপূর্বাব্দ, **ইরাটোস্থেনিস**, 250 খ্রীস্টপূর্বাব্দ।
7. এলিস : **হিপিয়াস**, 425 খ্রীস্টপূর্বাব্দ।
8. এথেন্স : **সোলন**, 600 খ্রীস্টপূর্বাব্দ ; **সক্রেটিস**, 425 খ্রীস্টপূর্বাব্দ মেটন, 432 খ্রীস্টপূর্বাব্দ : **থিয়েটেটাস**, 375 খ্রীস্টপূর্বাব্দ ; প্লেটো, 380 খ্রীস্টপূর্বাব্দ ; **টলেমী**, 150 খ্রীস্টপূর্বাব্দ।
9. স্টাগেরিয়া : **অ্যারিস্টটল**, 340 খ্রীস্টপূর্বাব্দ।
10. অ্যাবডেরা : **ডিমোক্রিটাস**, 400 খ্রীস্টপূর্বাব্দ।
11. চিওস : **হিপোক্রেটিস** ; 460 খ্রীস্টপূর্বাব্দ।
12. সামোস : **পীথাগোরাস** ; কোনন, 260 খ্রীস্টপূর্বাব্দ। **আরিসটারকাস**, 260 খ্রীস্টপূর্বাব্দ।
13. ক্রীট : প্রাচীন সভ্য দ্বীপ।
14. স্নিডাস : **ইউডক্সাস**, 370 খ্রীস্টপূর্বাব্দ।
15. মিলেটাস : **থ্যালেস**, 600 খ্রীস্টপূর্বাব্দ ; অ্যানাক্সিম্যান্ডার, 575 খ্রীস্টপূর্বাব্দ ; **অ্যানাক্সিমেনেস**, 530 খ্রীস্টপূর্বাব্দ।
16. স্মার্না : থিওন, 125 খ্রীস্টাব্দ।
18. পারগানাম : বিখ্যাত গ্রন্থাগার।
19. সিজিকাস : **ক্যালিপাস**, 325 খ্রীস্টপূর্বাব্দ।
20. নিসিয়া : **হিপারকাস**, 140 খ্রীস্টপূর্বাব্দ ; থিওডোসিয়াস, 50 খ্রীস্টপূর্বাব্দ।

21. পার্গা ঃ অ্যাপোলোনিয়াস, 225 খ্রীস্টপূর্বাব্দ ।
24. আলেকজান্দ্রিয়া ঃ ইউক্লিড, 300 খ্রীস্টপূর্বাব্দ ; প্যাপাস 300 খ্রীস্টাব্দ ; থিওন, 300 খ্রীস্টাব্দ ; হাইপেসিয়া, 400 খ্রীস্টাব্দ ; ডায়োফ্যাণ্টাস, 275 খ্রীস্টাব্দ ; ইরাটোস্থেনিস, 230 খ্রীস্টাপূর্বাব্দ ; অ্যাপোলোনিয়াস, 225 খ্রীস্টাপূর্বাব্দ ; হীরেন, 100 খ্রীস্টাব্দ ।*



চিত্র—২

ক্লাসিক্যাল যুগের সূচনা পর্বের প্রধান প্রধান প্রতিষ্ঠান ঃ আয়োনীয় প্রতিষ্ঠান

এ যুগের প্রথম প্রতিষ্ঠান হচ্ছে আয়োনীয় প্রতিষ্ঠান। এর প্রতিষ্ঠাতা সপ্তঋষি বা জ্ঞানীর অন্যতম থ্যালেস (Thales)। এশিয়া মাইনরের পশ্চিম প্রান্তে ভূমধ্যসাগরীয়

* ক্রমিক সংখ্যা। চিত্র—২ অনুযায়ী।

উপকূলের **মিলেটাস**-এ (**Miletus**) থ্যালেস জ্ঞান-বিজ্ঞান শিক্ষার কেন্দ্র গড়ে তোলেন। এখানে তাঁর কাছে জ্ঞান-বিজ্ঞানের পাঠ নেন অ্যানাক্সিম্যাণ্ডার (**Anaximander**) ও অ্যানাক্সিমেনেস (**Anaximenes**)। আর বিখ্যাত পীথাগোরাসও তাঁর কাছে গণিতের পাঠ নিতেন বলে জানা যায়। আয়োনীয় প্রতিষ্ঠান খুব বেশী দিন স্থায়ী হয়নি,—মাত্র একশ' বছর স্থায়ী হয়েছিল। থ্যালেসের সময় গণিতের তেমন উল্লেখযোগ্য বা বিস্ময়কর উন্নতি হয়নি সত্য, কিন্তু এই আয়োনীয়ায় তিনি যে দর্শন ও বিজ্ঞানের ভিত্তিভূমি প্রস্তুত করেছিলেন, তার ওপর সমগ্র গ্রীস নির্ভর করেছিল। তাঁরই শিষ্য-প্রশিষ্যরা পরে গ্রীসের অন্যত্র ছড়িয়ে পড়ে জ্ঞানের আলো জ্বালতে থাকেন। সেই আলোকে গ্রীস প্রদীপ্ত ও উজ্জীবিত হয়ে ওঠে। গ্রীসের গণিত চর্চায় এই বিদ্যাপীঠের ছাত্রদের রয়েছে অসামান্য অবদান।

পীথাগোরীয় প্রতিষ্ঠান

মিলেটাস, মিশর ও ব্যাবিলন প্রভৃতি দেশে বিদ্যাশিক্ষা ও ভ্রমণ শেষ করে পীথাগোরাস দক্ষিণ ইটালীর ক্রোটন (**Croton**) নগরীতে ধর্ম-দর্শন-বিজ্ঞান শিক্ষার কেন্দ্র গড়ে তোলেন। এই প্রতিষ্ঠানের সদস্যরা ছিল সীমিত সংখ্যক। প্রতিষ্ঠানের বৈশিষ্ট্য ছিল এখানকার সদস্যরা তাদের জ্ঞান ও বিদ্যার কথা প্রকাশ ও প্রচার করতে পারতনা,—সব কিছু গোপন রাখতে হতো। এই প্রতিষ্ঠানের নাম ছিল **ভ্রাতৃসংঘ** (**Brotherhood**)।

ঐতিহাসিকরা অনুমান করেন, পীথাগোরাস অরফীয় ধর্মমতে বিশ্বাসী ছিলেন। তাঁর উদ্ভাবিত ও প্রচারিত দর্শনের দুটি দিক,—একটি দার্শনিক, অপরটি ধর্মীয়। তাঁর সংঘে নারীদের প্রবেশাধিকারও ছিল। কেবল ক্রোটনেই নয়, নিকটবর্তী বহু নগরী থেকে এই সম্প্রদায় সভ্য সংগ্রহ করেছিল। এমন কি, ইটালীর গ্রীক উপনিবেশে এরা প্রভূত রাজনৈতিক ক্ষমতা অর্জন করে। পীথাগোরীয় সম্প্রদায় যখন ক্ষমতার উচ্চ শিখরে, তখন ক্রোটনের সঙ্গে প্রতিবেশী রাষ্ট্র **সাইবারিস**-এর (**Sybaris**) যুদ্ধ আরম্ভ হয়। সাইবারিসের বহু নাগরিক স্বৈরাচারী শাসকের অত্যাচারে ক্রোটনে আশ্রয় গ্রহণ করে। শাসকের নির্দেশে তাদের ফিরিয়ে না দেওয়ায় যুদ্ধ হয়, এবং সাইবারিস ধ্বংস হয়। সাইবারিস ধ্বংসে নাকি পীথাগোরীয় সম্প্রদায়ের হাত ছিল। তখন থেকে এই সম্প্রদায়ের বিরুদ্ধে ক্ষোভ ধূমায়িত হতে থাকে। পীথাগোরাস তখন নিরাপদ স্থানে গমন করলেন। তারপর গণতন্ত্রীরা ক্ষমতায় এলে এই সম্প্রদায়ের অনেককেই মৃত্যুবরণ করতে হয় অথবা নির্বাসনে যেতে হয়।

গণিতে এই সম্প্রদায়ের যথেষ্ট অবদান আছে। যথাস্থানে এবিষয়ে আলোচনা করা হবে।

ক্ল্যাসিক্যাল যুগ ঃ ইলিয়াটীয় প্রতিষ্ঠান

ষষ্ঠ খ্রীস্টপূর্বাব্দের শেষের দিকে কোলোফোন-এর (**Colophon**) **জেনোফেনস** (**Xenophanes**) সিসিলিতে বসবাস আরম্ভ করেন এবং সেখানে একটি প্রতিষ্ঠান স্থাপন করেন। এই প্রতিষ্ঠানের অন্তর্ভুক্ত ছিলেন **পারমেনাইডিস** ও **জেনো**। পরে পারমেনাইডিস ও জেনো দক্ষিণ ইটালীর ইলিয়া-য় (**Elea**) বসবাস করায় প্রতিষ্ঠানটি এখানে স্থানান্তরিত হয় এবং **ইলিয়াটীয় প্রতিষ্ঠান** নামে আখ্যাত হয়।

সোফীয় প্রতিষ্ঠান

সালামিস (**Salamis**)-এর যুদ্ধ জয় গ্রীক জীবনে একটি উল্লেখযোগ্য ঘটনা। গ্রীসের ইতিহাসে অনেক বিখ্যাত যুদ্ধের বর্ণনা আছে, কিন্তু সালমিসের যুদ্ধ বিশেষ তাৎপর্যপূর্ণ। ঐতিহাসিকরা বলেন, মারাথন বিজয়ের কৃতিত্ব একা এথেন্সের, কিন্তু সালামিস বিজয় সমগ্র গ্রীক জাতির। এই যুদ্ধে জেরকসের (**Xerxes,** ক্ষরায়ুস ?), হাতে 480 খ্রীস্টপূর্বাব্দে পারসিকদের পরাজয় ঘটল। তখন থেকেই এথেন্সের শ্রীবৃদ্ধি শুরু হলো,—ব্যবসা-বাণিজের প্রধান কেন্দ্ররূপে পরিগণিত হতে থাকল। ঐশ্বর্যশালী এথেন্সে দাসরা (**Slave**) কায়িক পরিশ্রম করত ; ধনীরা মানসিক চর্চায় তাদের অবসর সময় যাপন করত। গণতন্ত্রী এথেন্সে স্বাধীনতার সব সুযোগ ছিল। তাই বিদ্যাশিক্ষার অপরিহার্যতা অনুভূত হতে থাকে। উপযুক্ত শিক্ষক না হলে প্রকৃত বিদ্যার্জন সম্ভব নয়। ফলে, আয়োনীয় ও পীথাগোরীয় প্রতিষ্ঠান সমূহ থেকে শিক্ষক আনার ব্যবস্থা করা হয়। এই সব শিক্ষকরা যে প্রতিষ্ঠান স্থাপন করলেন, তা-ই **সোফীয়া** প্রতিষ্ঠান (**Sophist**)। **Sophist** শব্দের প্রকৃত অর্থ **Wise men,**—জ্ঞানী লোক। এই প্রতিষ্ঠানে বিমূর্ত যৌক্তিকতার ওপর জোর দেওয়া হতো। আর সব চেয়ে বড় কথা, প্রকৃতি ও মানুষ যৌক্তিক ক্ষেত্রে প্রতিষ্ঠিত হলো। কিন্তু এই বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিভঙ্গী যে এথেন্সেবাসীদের ভাল লাগেনি,—মনের মত হয়নি, তা আমরা আগেই আলোচনা করেছি।

অ্যাকাডেমী

পেরিক্লিস ঘোষণা করেছিলেন, এথেন্স নিখিল গ্রীসের বিদ্যাপীঠ। তাঁর এই আদর্শ পরবর্তীকালে রূপায়িত হয়েছিল। আইসোক্রেটিস (**Isocratis**) এর চিন্তাধারা ও শিক্ষা এথেন্সের গৌরব যেমন বৃদ্ধি করেছিল, তেমনি প্লেটোর অ্যাকাডেমী সমগ্র গ্রীসের গুরু স্থানীয় হয়ে উঠেছিল। অ্যাকাডেমীতে শিক্ষা লাভের জন্য সমগ্র গ্রীস থেকে প্রতিভাবান ছাত্ররা এসে ভিড় করত। অ্যাকাডেমীর জনক

প্লেটো স্বয়ং। তিনি 387 খ্রীস্টপূর্বাব্দে অ্যাকাডেমী প্রতিষ্ঠা করেন। মহাজ্ঞানী অ্যারিস্টটল সতেরো বছর বয়সে এসে এখানে কুড়ি বছর ধরে প্লেটোর অধীনে নানা বিষয়ে গভীর অধ্যয়ন করেন। তা ছাড়া, মেনেকমাস, ডিনোস্ট্রাটাস, থিয়েটেটাস প্রমুখ এই প্রতিষ্ঠানের সঙ্গে যুক্ত ছিলেন। ডিনোস্ট্রাটাস ছিলেন প্লেটোর অনুজ,—তাঁর মাতার দ্বিতীয় স্বামীর পুত্র। দর্শন, বিজ্ঞান ও জ্যামিতির গবেষণায় এই প্রতিষ্ঠানের অসামান্য অবদান অদ্যাবধি শ্রদ্ধার সঙ্গে স্মরণ করা হয়। অ্যাকাডেমী ছিল আধুনিক বিশ্ববিদ্যালয়ের প্রতিরূপ। এখানে প্রচলিত পাঠক্রমও ছিল।

প্লেটোর মৃত্যুর পর এই প্রতিষ্ঠানে তেমন বিস্ময়কর প্রতিভা আর দেখা যায়নি। কিন্তু পরবর্তী সব অধ্যক্ষই প্লেটোর আদর্শ ও শিক্ষা বাঁচিয়ে রাখতে সচেষ্ট ছিলেন। স্পিউসিপাস ছিলেন প্লেটোর ঠিক পরবর্তী অধ্যক্ষ। তারপর জেনোক্রেটিস এই পদে আসীন হন। অ্যাকাডেমী দীর্ঘদিন প্রায় ন'শ' বছর ধরে বিদ্যাশিক্ষার কেন্দ্ররূপে বর্তমান ছিল। 529 খ্রীস্টাব্দে **জাস্টিনিয়ান** এক আদেশ বলে এই বিদ্যাপীঠ বন্ধ করে দেন।

লাইসিয়াম

প্লেটোর মৃত্যুর পর অ্যারিস্টটল অ্যাকাডেমী থেকে বিদায় নিয়ে যে বিদ্যাপীঠ প্রতিষ্ঠা করেন, তার নাম **লাইসিয়াম**। 335 খ্রীস্টপূর্বাব্দ এর প্রতিষ্ঠাকাল। লাইসিয়ামে বাগান ছিল, বক্তৃতা কক্ষ ছিল, আর একটি বেদীও ছিল। এই বিদ্যাপীঠের পরিকল্পনা ও স্থাপত্য ছিল অতি উচ্চ পর্যায়ের। পরবর্তীকালের বিশ্ববিখ্যাত আলেকজান্দ্রিয়া বিশ্ববিদ্যালয় **মিউজিয়াম**-এর অনুকরণেই গড়ে উঠেছিল।

লাইসিয়ামে ভিন্ন ভিন্ন বিষয় পঠন-পাঠন ও গবেষণার জন্য পৃথক পৃথক বিভাগ ছিল। অর্থাৎ বিশেষীকরণ শুরু হয়েছিল বলা যায়। বিশেষজ্ঞরা বিভিন্ন বিষয়ের ভারপ্রাপ্ত হতেন। যেমন, **ইউডিমাস**-এর ওপর গণিত ও জ্যোতির্বিজ্ঞানের ভার ছিল, আর **জেনোক্রেটিস**-এর ওপর ভার ছিল জ্যামিতিক গবেষণার।

এখান থেকে নানা মূল্যবান প্রামাণিক গ্রন্থ প্রকাশিত হয়। যেমন,—"উদ্ভিদবিদ্যা, চিকিৎসাবিদ্যা, গণিত, জ্যোতিষ, বলবিদ্যা, পদার্থবিদ্যা, ভূগোল, সঙ্গীত, ব্যাকরণ প্রভৃতি নানা বিষয়ে মূল্যবান গ্রন্থাদি প্রকাশিত হয়।"[৭] পণ্ডিত, বিশেষজ্ঞ ও গবেষকদের জন্যই কেবল লাইসিয়ামের দ্বার উন্মুক্ত ছিল না, সাধারণ মানুষের জন্যও এখানে সন্ধ্যায় জনপ্রিয় বক্তৃতা দেবার ব্যবস্থা ছিল। জ্ঞান-বিজ্ঞানের প্রসার, প্রচার ও জনপ্রিয়করণে লাইসিয়ামের অবদান অনস্বীকার্য।

৭. বিজ্ঞানের ইতিহাস—সমরেন্দ্রনাথ সেন, পৃ—২০০

আলেকজান্দ্রিয় যুগ

গ্রীক বীর আলেকজাণ্ডারের মৃত্যুর পর তাঁর বিশাল সাম্রাজ্য প্রধান প্রধান সেনাপতিরা ভাগ করে নিলেন। ইউরোপীয় অংশে শাসনকর্তা হলেন অ্যাণ্টিগোনাস ; এশীয় ভূখণ্ডের অধিপতি হলেন সেলুকাস ; আর মিশর টলেমী রাজবংশের অধীন হলো। গণিত চর্চার দিক থেকে বিচার করলে দেখা যায়, গ্রীস ও ম্যাসিডন ক্রমে ক্রমে রোমানদের অধিকারে যাওয়ায় সেখানে গণিত চর্চা বিশেষ কিছু হয়নি ; এশীয় অংশে বেশীর ভাগ ক্ষেত্রে ব্যাবিলনীয় গণিতের অনুশীলন হয়েছে,—ক্রমে ক্রমে ক্লাসিক্যাল গ্রীক প্রভাবও পড়েছে। কিন্তু আলেকজান্দ্রিয়ায় জ্ঞান-বিজ্ঞানের অন্য বিষয়ের চর্চা হলেও গণিত প্রধান বিষয় হিসাবে পরিগণিত হয়েছে। সেইজন্যই এখানে গণিতে নানা আবিষ্কার ও উদ্ভাবন সম্ভব হয়েছে। গ্রীক গণিতের শেষ পর্বের ইতিহাসে আলেকজান্দ্রিয়া বিশিষ্ট স্থান অধিকার করে আছে। কেবল পূর্ববর্তী গ্রীক গণিতের সঙ্গে চারিত্রিক পার্থক্যেই নয়,—নতুন নতুন সম্ভাবনাও এখানে রচিত হয়েছে।

স্বয়ং অ্যারিস্টটলের দ্বারা শিক্ষিত আলেকজাণ্ডার দিব্যদৃষ্টিতে বুঝতে পেরেছিলেন আগামী যুগে গ্রীক ভূখণ্ডে রাজধানী গড়ে তোলা অযৌক্তিক। তাই তার বাসনা ছিল আলেকজান্দ্রিয়ায় রাজধানী স্থাপন করবেন। তিনি নানা পরিকল্পনার মাধ্যমে এই নগরীকে সুন্দরী ও শ্রেষ্ঠ করে গড়ে তোলার কাজে হাতও দিয়েছিলেন ; কিন্তু সম্পূর্ণ করে যেতে পারেননি। তাঁর মৃত্যুর পর এই কাজে হাত দিলেন টলেমী।

খ্রীস্টপূর্ব 323 থেকে 222 পর্যন্ত যে-সব টলেমী রাজারা শাসনকার্য পরিচালনা করেছিলেন, তাঁরা প্রত্যেকেই ছিলেন জ্ঞানী ও জ্ঞানের পৃষ্ঠপোষক। পীথাগোরাস, প্লেটো ও অ্যারিস্টটলের দর্শন ও বিজ্ঞান বিষয়ে চিন্তা-ভাবনার সঙ্গে এঁরা সবাই সম্যক পরিচিত ছিলেন। তাঁরা তখনকার শ্রেষ্ঠ বিদ্যাপীঠ থেকে বিদ্বান ও জ্ঞানীদের সমবেত করলেন আলেকজান্দ্রিয়ায়। এমনি করে আনুমানিক 290 খ্রীস্টপূর্বাব্দে **টলেমী সটার** (**Ptolemy Soter**) গড়ে তুললেন বিশ্ববিশ্রুত 'মিউজিয়াম'। এখানে মিশ্র সভ্যতার এক অপরূপ কেন্দ্র স্থাপিত হলো,—গ্রীস, পারস্য, ইথিওপিয়া, আরব, ভারত, আফ্রিকা প্রভৃতি দেশ থেকে বিদ্বান ও পণ্ডিতদের সমাগম হলো। নানা আদর্শ ও ভাবের আদান-প্রদানে মিউজিয়াম হয়ে উঠল সমৃদ্ধ ও ঐশ্বর্যপূর্ণ।

মিউজিয়াম

অ্যাকাডেমী ও লাইসিয়ামকে বিশ্ববিদ্যালয়ের আদি রূপ বললে মিউজিয়াম প্রকৃত বিশ্ববিদ্যালয়। এখানে সাহিত্য, গণিত, জ্যোতির্বিজ্ঞান ও চিকিৎসাবিদ্যা এই চারটি প্রধান বিভাগ ছিল। লাইসিয়ামের মত এখানে প্রত্যেক বিভাগের

ভারপ্রাপ্ত ছিলেন একজন করে বিশেষজ্ঞ সাহিত্যিক বা বিজ্ঞানী। এখানে অধ্যাপকের সংখ্যা ছিল প্রায় একশ'। পেরিক্লিস যেমন বেতন দানের ব্যবস্থা করেছিলেন, তেমনি এখানেও টলেমীরা রাজকোষ থেকে বেতন দানের প্রচলন করেন।

মিউজিয়ামের অমূল্য সম্পদ ছিল তার মূল্যবান গ্রন্থাগার। অ্যারিস্টটলের সংগৃহীত গ্রন্থাদিও এখানে স্থান পায়। গ্রন্থের সংখ্যা ছিল প্রায় 750,000। কেবল সংরক্ষণের জন্যই গ্রন্থাদি সংগৃহীত হয়নি, সাধারণ মানুষের পাঠের ব্যবস্থাও ছিল এখানে। প্রধান গ্রন্থাগারিকের পদে নিযুক্ত হয়ে আসেন লাইসিয়ামের অধ্যক্ষ স্ট্রাটো।

তিল তিল করে গড়ে তোলা এই বিশাল জ্ঞান ভাণ্ডারের অংশ-বিশেষ ধ্বংস করেন **বিশপ থিওফিলাস** 390 খ্রীস্টাব্দে। 640 খ্রীস্টাব্দে মুসলমানরা আলেকজান্দ্রিয়া অধিকার করে এই গ্রন্থাগারের সম্পূর্ণ ক্ষতিসাধন করে। অগ্নিতে ভস্মীভূত করে খলিফা ওমর যে উক্তি করেছিল, তা আজ হাস্যকর ও ঘৃণার। ওমরের মত ঃ এ সবের যদি কোরাণের সঙ্গে মিল থাকে, তা হলে রেখে লাভ কি ? আর অমিল থাকলে তাকে অবশ্যই ধ্বংস করতে হবে। এমনি করে ধর্মান্ধতা মানবজাতির সভ্যতা ও সংস্কৃতির বহু অমূল্য সম্পদ ধ্বংস করেছে। এখনো অন্য ভাবে সেই ধ্বংসলীলা চলছে। এর কবে অবসান হবে,—কবে মানুষ স্বাধীন ও মুক্ত মন ও চিন্তায় নির্ভীকভাবে জীবনযাপন করতে পারবে ?

আলেকজান্দ্রিয় গণিতের বৈশিষ্ট্য

মিউজিয়ামে প্রধানত সাহিত্য, গণিত, জ্যোতির্বিজ্ঞান ও চিকিৎসাবিদ্যার চর্চা হলেও এখানে কেন্দ্রীয় বিষয় ছিল গণিত। সমাজ ও রাষ্ট্রের পরিবর্তন, সভ্যতা ও সংস্কৃতির রূপান্তরের সঙ্গে কাঁধে কাঁধ মিলিয়ে চলতে হলে যেমন অনেক কিছুর পরিবর্তন হয়, গণিতের ক্ষেত্রেও এর ব্যতিক্রম দেখা যায় না। যুগের অনিবার্য ও অপরিহার্য প্রয়োজনেই মিউজিয়ামের যুগে গ্রীক গণিতের কিছু কিছু পরিবর্তন দেখা যায়,—নতুন চারিত্র্য বৈশিষ্ট্য প্রকাশ পায়। এই পরিবর্তন ও বৈশিষ্ট্য প্রধানত **আর্কিমিডিস**, **হীরন**, **নিকোম্যাকাস** ও **ডায়োফ্যান্টাসের** মধ্যে দেখা যায় ; **হিপারকাস** ও টলেমীও এই গোষ্ঠীর অন্তর্ভুক্ত। **অ্যাপোলোনিয়াস** দাঁড়িয়ে আছেন দুই যুগ,—ক্লাসিক্যাল ও আলেকজান্দ্রিয় যুগের মধ্যস্থলে। মহান ইউক্লিড আলেকজান্দ্রিয় যুগের মানুষ হয়েও গাণিতিক চিন্তাধারায় ও উপস্থাপনে, প্রকৃতি ও মেজাজে সম্পূর্ণ ক্লাসিক্যাল যুগের গণিতজ্ঞ। অ্যাপোলোনিয়াসের **কনিক সেকশন** ক্লাসিক্যাল, কিন্তু জ্যোতির্বিজ্ঞান বিষয়ক গবেষণা ও অমূলদ রাশি সম্পর্কে ধারণা মিউজিয়াম-এর সমধর্মী গুণ বিশিষ্ট।

বিমূর্ত ও তাত্ত্বিক গণিতে পূর্ববর্তী যুগের সঙ্গে মিউজিয়াম যুগের একটা বড় পার্থক্য হলো, এ-যুগে জ্যামিতিক সংজ্ঞা সুস্পষ্ট হলো এবং গণনার প্রবণতা দেখা

দিল। আলেকজান্দ্রিয় জ্যামিতি প্রধানত দৈর্ঘ্য, ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয়ের অতি প্রয়োজনীয় গণনায় নিবদ্ধ হলো। ইউক্লিডের জ্যামিতিতে যে এই প্রবণতা একেবারেই দেখা যায়নি তা নয়, কিন্তু খুব কম। জ্যামিতিতে সংখ্যা ব্যবহার এই যুগের গণিতের অন্যতম বৈশিষ্ট্য।

ক্লাসিক্যাল যুগে অমূলদ রাশি সংখ্যা হিসাবে বিবেচিত হয়নি। সেইজন্য সে-যুগে জ্যামিতির গুণগত দিকটি অধিক পরিমাণে পরিস্ফুট হয়েছে। অমূলদ রাশি আবিষ্কার গ্রীক গণিতজ্ঞদের কাছে যে চ্যালেঞ্জ রেখেছিল, পীথাগোরাসের পর থেকে দীর্ঘদিন ধরে এই নিয়ে গণিতজ্ঞরা চিন্তা-ভাবনা করেছেন, কিন্তু সফল হননি। অপর পক্ষে, জ্যামিতিতে অন্য উপায়ে সুনিপুণভাবে অমূলদরাশি এড়িয়ে চলার প্রয়াস পেয়েছেন। তাঁদের সমানুপাতের তত্ত্ব "involves only geometrical quantities and integral multiples of them, so that no general definition of number, rational or irrational, is necessary."[৮]

বলবিদ্যার অনুশীলন এ-যুগের আর একটি বিশিষ্ট গাণিতিক কর্ম পদ্ধতি। বিশিষ্ট গণিতজ্ঞরা নানা ধরনের আকার বিশিষ্ট বস্তুর **ভারকেন্দ্র** নির্ণয় করার প্রয়াস পেয়েছেন,—এ-বিষয়ে আর্কিমিডিসের নাম সর্বাগ্রগণ্য। তাঁর বল, নততল, কপিকল ইত্যাদি গবেষণা উল্লেখ করার মত। আর্কিমিডিস **লিভার**-এর কার্যকারিতা সম্পর্কে এমন মুগ্ধ হয়েছিলেন যে তিনি বলতেন, "give me a fulcrum on which to rest, and I will move the earth."

ক্লাসিক্যাল যুগে গণিতের ক্ষেত্রটি ছিল সীমাবদ্ধ। গণিতজ্ঞদের দৃষ্টি নিবদ্ধ ছিল কেবল জ্যামিতি, জ্যোতির্বিজ্ঞান আর সঙ্গীতে। পাটীগণিতে অখণ্ড সংখ্যা ছাড়া আর কোন প্রকার সংখ্যা বিবেচিত হয়নি। কিন্তু মিউজিয়ামের যুগে গণিতের ক্ষেত্র প্রসারিত হলো,—গণিতে পাটীগণিত (সংখ্যা তত্ত্ব), জ্যামিতি, বলবিদ্যা, জ্যোতির্বিজ্ঞান, আলোক, সঙ্গীত, ব্যবহারিক পাটীগণিত ইত্যাদি আলোচিত হতে থাকল। এ-সম্পর্কে প্রোক্লাসের মতটি উল্লেখযোগ্য ঃ "The entire mathematics was separated into two main divisions with distinction ঃ one part concerned itself with the intellectual concepts and the other with material concepts." পাটীগণিত ও জ্যামিতি ছিল মননশীল প্রত্যয়ের বা ধারণার অন্তর্ভুক্ত, আর অন্য সব বিষয় ছিল ইন্দ্রিয় প্রত্যক্ষ বাস্তব ধারণার। কিন্তু এই পার্থক্য সর্বত্র রক্ষিত হয়নি। খ্রীস্টপূর্ব প্রথম শতাব্দীর কাছাকাছি সময় থেকে এই পার্থক্য তেমন আর দেখা যায় নি। সাধারণভাবে এ যুগের বৈশিষ্ট্য আলোচনায় এরূপ বলা যায় যে, আলেকজান্দ্রিয় গণিতজ্ঞরা এক-

৮. The History of the Calculus and its Conceptual Development—C. B. Boyer, Page--31

দিকে গণিতের সঙ্গে দর্শনের ঘনিষ্ঠ সম্বন্ধ স্থাপন করার প্রয়াস পেয়েছেন, আবার অন্যদিকে গণিত ও কারিগরিবিদ্যার সঙ্গে হরগৌরী-মিলন করার প্রচেষ্টা পেয়েছেন।

* * * * *

মানব সভ্যতা ও সংস্কৃতির ইতিহাসে গ্রীক জাতির স্থান গৌরবের, আর প্রশংসার কথা, বলাই বাহুল্য। কিন্তু রাজনীতি ইতিহাসের গতিপথ নিয়ন্ত্রণ করে,—উত্থান-পতন ত্বরান্বিত করে। আবার, ইতিহাসের গতি গণিতের গতিপথকে বোধ করি অধিক পরিমাণে নিয়ন্ত্রিত করে। তাই যতদিন টলেমী-শাসন অব্যাহত গতিতে বয়ে চলেছিল ততদিন গ্রীক গণিতেরও সুদিন,—বসন্তকাল ছিল। তারপর রোমানদের একাধিপত্যে সব ধূলিসাৎ হয়ে গেল। খ্রীস্টীয় প্রথম শতাব্দীর প্রারম্ভ কাল থেকেই গ্রীক গণিতের অবক্ষয় শুরু। **টলেমী, ডায়োফ্যাণ্টাসের** পর আর সৃজনশীল প্রতিভার দেখা পাওয়া যায়নি। পঞ্চম শতাব্দীর মধ্যভাগে হাইপেসিয়া-র নির্মম হত্যার মাধ্যমে এই গৌরবময় গণিতের ইতিহাসের অবসান। তবুও **the thought and the creative and artistic impulse of the Greeks rose to a level that made their achievement a lamp to mankind for all the rest of history.**"[৯] কেবল রাজনীতি ও সমাজ-বিজ্ঞানের ইতিহাসের ক্ষেত্রেই নয়, গণিতের ইতিহাসের ক্ষেত্রেও উক্তিটি সমভাবে প্রযোজ্য।

---

৯. A Short History of the World—H.G. Wells, Page—89

প্রথম অধ্যায়

আদি গ্রীক গণিতজ্ঞ থ্যালেস

(640—546 খ্রীস্টপূর্বাব্দ)

"Without the concepts, methods and results found and developed by previous generations right down to Greek antiquity one cannot understand either the aims or the achievements of mathematics in the last fifty years."—Hermann Weyl.

প্রাক ঐতিহাসিক যুগের বিজ্ঞান ও গণিত চর্চা সুপরিকল্পিত ও শৃঙ্খলামণ্ডিত নয়। তখন যেটুকু বিজ্ঞান ও গণিত-চর্চা হয়েছে তা সবই প্রায় বিচ্ছিন্ন-



থ্যালেস

ভাবে। অন্তর্নিহিত তাগিদ ও খেয়ালবশে প্রতিভাধর মানুষ বিজ্ঞান ও গণিত অনুশীলন করেছে। প্রাচীন সভ্য দেশগুলির বিজ্ঞান ও গণিত চর্চার সুস্পষ্ট কোন

ধারা দেখতে পাওয়া যায় না। গ্রীকদের হাতেই বিজ্ঞান চর্চা সুষ্ঠু ও সুচারুরূপে আরম্ভ হয়। থ্যালেসের পর থেকে গ্রীক বিজ্ঞান ও গণিতে একটি সুস্পষ্ট প্রবাহ দেখতে পাওয়া যায়। বিজ্ঞান-সভ্যতা ও বিজান-মানসিকতার মূল মন্ত্র ঃ কি, কিরূপ ও কেন থ্যালেসের যুগ থেকেই শুরু। আর এই যুগের প্রবর্তক হচ্ছেন থ্যালেস; তিনিই সর্বপ্রথম প্রকৃত বৈজ্ঞানিক অনুসন্ধান ও আধুনিক চিন্তাধারার প্রবর্তন করেন। তাঁর মধ্যে যুক্তি-তর্কভিত্তিক চিন্তাশক্তি ও মননশীলতার বিকাশ দেখতে পাওয়া যায়। আপ্ত বাক্য নয়, সব-কিছু চুলচেরা বিচার করে গ্রহণ করার প্রবণতা তিনিই গ্রীকদের মধ্যে সঞ্চারিত করেন। আধুনিক অর্থে তিনিই আদি বিজ্ঞানী, আদি জ্যোতির্বিদ, আদি গণিতজ্ঞ ও আদি দার্শনিক; তিনি সপ্তজ্ঞানীর অন্যতম; বিজ্ঞান ও গণিতের প্রপিতামহ, ভীষ্ম।

মিলেটাস নগরীকে কেন্দ্র করেই গ্রীক সভ্যতা, সংস্কৃতি, ঐতিহ্য আর বিজ্ঞান চর্চার জয়যাত্রা। মিলেটাস ছিল পশ্চিম এশিয়া মাইনরের একটি প্রধান ব্যবসা-বাণিজ্য কেন্দ্র। ভৌগোলিক অবস্থান এই নগরীর সমৃদ্ধির অন্যতম কারণ। জল-পথে মিশর ও ফিনিসিয়া থেকে জাহাজ এসে ভিড়ত এই বন্দরে; স্থলপথে ব্যাবিলন ও আরো পশ্চাদবর্তী দেশের সঙ্গে যোগাযোগ হতো ক্যারাভান-এর মাধমে। সমৃদ্ধশালী এই নগরী যে জ্ঞান-বিজ্ঞানের পীঠস্থান হয়ে উঠবে, তাতে বিস্ময়ের কিছু নেই। আদি বিদ্বান ও জ্ঞানী থ্যালেস এখানেই আয়োনীয় প্রতিষ্ঠান বা বিদ্যাপীঠ প্রতিষ্ঠা করলেন। ভূমধ্যসাগর তীরবর্তী এই নগরী শুধু ব্যবসা-বাণিজ্যেই নয়, জ্ঞান-বিজ্ঞান চর্চার পীঠস্হানরূপে অতীব গুরুত্বপূর্ণ হয়ে উঠল সেই খ্রীস্টপূর্ব সপ্তম-ষষ্ঠ শতাব্দীতে। এই বিদ্যাপীঠে থ্যালেস যে জ্ঞানের দীপশিখা প্রজ্বলিত করলেন, তা-ই ক্রমশ দেদীপ্যমান হয়ে সমগ্র গ্রীসে ছড়িয়ে পড়ল; গ্রীসের আদি পর্বের শ্রেষ্ঠ প্রতিভাধররা প্রত্যক্ষ বা পরোক্ষভাবে তাঁদের প্রপিতামহের কাছে অবশ্যই ঋণী।

মিলেটাস তার গৌরব খুব বেশী দিন অক্ষুণ্ণ রাখতে পারেনি। 540 খ্রীস্ট-পূর্বাব্দে এই নগরী পারসিকদের দ্বারা আক্রান্ত হয় এবং ক্রমে ক্রমে এর গৌরব-রবি অস্তমিত হতে থাকে। কিন্তু তা হলেও গ্রীসের গৌরব আর একটি নগরীকে কেন্দ্র করে বৃদ্ধি পেতে থাকে; মূল গ্রীক ভূখণ্ডে **এথেন্স** আত্মপ্রকাশ করতে থাকে,— গ্রীক ইতিহাসের স্বর্ণ যুগে।

থ্যালেসের পরিচয়

থ্যালেসের ব্যক্তি-জীবন সম্বন্ধে সঠিকভাবে কিছু বলা সম্ভব নয়। ঐতিহাসিকরা অনুমান করেন, খুব সম্ভব তাঁর শরীরে ফিনিসীয় রক্ত বয়ে চলত। তাঁর পিতার নাম **একসামিনাস** (**Examinus**), মাতার নাম **ক্লিওবুলাইন** (**Cleobuline**)। তিনি সম্ভবত গ্রীক ছিলেন।

বিদ্যাশিক্ষার জন্য থ্যালেস মিশর ও ব্যাবিলন এই দুটি দেশের নিকট ঋণী। এই দুটি দেশের শ্রেষ্ঠ বিদ্যানিকেতনে তিনি পড়াশোনা করেন। আয়োনীয়ার কাছে **কস** দ্বীপে ব্যাবিলনীয় ধর্মযাজকরা একটি শিক্ষা-কেন্দ্র স্থাপন করেন। অনুমান করা হয়, এখানে তিনি ব্যাবিলনীয় শাস্ত্র ও বিজ্ঞানের পাঠ গ্রহণ করেছিলেন। তা ছাড়া এরূপ অনুমানও করা হয়, তিনি লিডিয়ার রাজধানী **সার্ডিস**-এ অধ্যয়ন করে থাকবেন।

দু-একটি কাহিনী

প্রতিভাবানদের নিয়ে সব যুগেই নানা কাহিনী ও গল্প গড়ে ওঠে। এ-সবের সত্যতা যাচাই করা খুব কঠিন। থ্যালেসকে কেন্দ্র করেও তেমনি অনেক গল্প প্রচলিত আছে। একথা সত্য, তিনি বহুমুখী প্রতিভার অধিকারী ছিলেন। কেবল গণিত-দর্শন-বিজ্ঞান-জ্যোতির্বিজ্ঞানেই নয়, ব্যবহারিক বিশেষ করে ব্যবসায়িক বিষয়ে তাঁর অসাধারণ নৈপুণ্য ও দূরদর্শিতা ছিল। একবার আবহাওয়া পর্যবেক্ষণ করে বুঝতে পারলেন, সে-বছর জলপাই-এর ফলন প্রচুর পরিমাণে বৃদ্ধি পাবে। তার আগে বেশ কয়েক বছর আবহাওয়ার জন্য জলপাই-এর ফলন মোটেই ভাল হয়নি। তাই জলপাই থেকে যে তেল উৎপাদন করা হতো সেইসব তৈল-নিষ্কাশন কলের তেমন চাহিদা ছিলনা। চাহিদা না থাকায় কলের মালিকরা ভাড়াও অনেক কমিয়ে দিয়েছিল। থ্যালেস এই সুযোগ গ্রহণ করলেন; অল্প ভাড়ায় মিলেটাস ও চিওসের প্রায় সব কল ভাড়া নিলেন। তাঁর বৈজ্ঞানিক পর্যবেক্ষণ সত্য হলো,—সে-বছর প্রচুর পরিমাণে জলপাই ফলল। তখন থ্যালেস উচ্চ হারে কলগুলি ভাড়া দিয়ে প্রভূত অর্থ উপার্জন করলেন।

প্রাচীনকাল থেকেই আকাশের গ্রহ-তারা মানুষকে সবচেয়ে বেশী করে আকর্ষণ করে আসছে। থ্যালেসের জ্যোতির্বিজ্ঞানে অসীম আগ্রহ ও অনুরাগ ছিল। তিনি কীরূপ গভীরভাবে আকাশের সৌন্দর্য-সুষমা, গ্রহ-তারাদের আলোর বৈচিত্র্যে আকৃষ্ট হতেন, আর বাহ্যজ্ঞান শূন্য হয়ে পর্যবেক্ষণ করতেন সে-সম্বন্ধে একটি কাহিনী বা গল্প প্রচলিত আছে।

একবার সান্ধ্যভ্রমণে বেরিয়েছেন থ্যালেস, সঙ্গে বয়স্কা পরিচারিকা। সূর্য গেলা অস্তাচলে, একে একে তারাগুলি ফুটে উঠল আকাশে। তিনি মুগ্ধ হলেন। আকাশের থেকে আর চোখ ফিরিয়ে নিতে পারছেন না; তাকিয়ে তাকিয়ে হাঁটছেন। হয়তো বা বহুদূরের তারাদের, গ্রহদের সম্পর্কে বৈজ্ঞানিক সিদ্ধান্তে আসার ছক তৈরী করছেন মনে মনে বা সৃষ্টিতত্ত্বের গভীরে ডুব দিয়েছেন। হঠাৎ পড়ে গেলেন গর্তে। তখন সেই পরিচারিকা বলে উঠল,—"**How canst thou know what is doing in the heavens, when thou seest not what is at thy feet?**"

সপ্তজ্ঞানীর অন্যতম থ্যালেস কি উত্তর দিয়েছিলেন তা আমাদের জানা নেই। কিন্তু একটি জিনিস সত্য, জ্ঞান-বিজ্ঞানের মহতী আবিষ্কার এসব মানুষরাই করে থাকেন। **নিউটন, আইনস্টাইন** প্রমুখ গণিতজ্ঞ ও বিজ্ঞানীদের জীবনে এমন ঘটনার অভাব নেই।

জ্যোতির্বিজ্ঞান চর্চা

গ্রীক চরিত্রে অলৌকিকতা, অন্ধ বিশ্বাস, কুসংস্কার, আপ্ত বাক্যের স্থান নেই। বিশ্বপ্রকৃতি ও প্রাকৃতিক ঘটনাসমূহকে ন্যায় ও যুক্তি-তর্কের কাঠগোড়ায় দাঁড় করিয়ে বিচার-বিশ্লেষণ করার প্রবণতাই তাদের বড় করে তুলেছে, তখনকার ও তার পূর্বেকার সভ্যদেশের সঙ্গে পৃথক করে রেখেছে। এই নবতর চিন্তাশক্তি ও মননশীলতার শিক্ষা শুরু হয় থ্যালেসের সময় থেকে। তিনিই বিজ্ঞানসম্মত উপায়ে জ্যোতির্বিজ্ঞান চর্চা আরম্ভ করেন। জ্যোতিষ বা ভাগ্যগণনার প্রতি তাঁর বিন্দুমাত্র আকর্ষণ ও আগ্রহ ছিল না। এই সময়কার বর্ণনা প্রসঙ্গে **H. G. Wells** বলেন,—"We find already in the sixth century B. C.—perhaps while Isaiah was still prophesying in Babylon—such men as Thales and Anaximander of Miletus and Heraclitus of Euphesus, who were what we should now call independent gentlemen, giving their minds to shrewd questionings of the world in which we live, asking, what its real nature was, whence it came and what its destiny might be, and refusing all ready made or evasive answers."[১]

ইতিহাস থেকে জানতে পারা যায়, 585 খ্রীস্টপূর্বাব্দের 28 মে পূর্ণ সূর্যগ্রহণ হয়েছিল। থ্যালেস এই গ্রহণ সম্পর্কে আগে থেকেই ভবিষ্যদ্বাণী করেছিলেন। কিন্তু কি করে তাঁর পক্ষে এই ভবিষ্যদ্বাণী করা সম্ভব হয়েছিল সে-সম্বন্ধে কিছু জানা যায় না। সেই প্রাচীনকালে গণিতের যখন শৈশব অবস্থা, তখন এরূপ পূর্বাভাস দেওয়া সম্ভব নয় বলে ঐতিহাসিকরা অনুমান করেন। কারণ, এই গ্রহণের কথা আগে থেকেই ঘোষণা করতে হলে জ্যোতির্বিজ্ঞানের লম্বন (parallax) সম্বন্ধে জ্ঞান থাকা দরকার। তা সত্ত্বেও থ্যালেস গ্রহণের কথা বলতে সমর্থ হয়েছিলেন।

গণিত চর্চা

থ্যালেস মিশর পরিভ্রমণ করেছিলেন। এখান থেকেই তিনি পাটীগণিত ও জ্যামিতি শিক্ষা করেন। গ্রীক মানসিকতায় গণিতের ব্যবহারিক দিকটি বিশেষ

১. A Short History of the World—H. G. Well, Page-85

স্থান পায়নি। তারা বিমূর্ত চিন্তায় আনন্দ পেত। থ্যালেস পাটীগণিতের ব্যবহারিক দিকটির প্রতি মোটেই আগ্রহী ছিলেন না। এককের মাধ্যমে তিনি সংখ্যার সংজ্ঞা দিয়েছেন, সংখ্যার নানা সম্পর্ক তাঁর অজ্ঞাত ছিল না। মিশরীয় প্যাপিরাসে **প্রগতি** সম্পর্কিত অঙ্ক দেখা যায়। সুতরাং এরূপ অনুমান করা যায় **প্রগতি, সংখ্যাতত্ত্ব** তাঁর জানা ছিল।

জ্যামিতির প্রতি গ্রীকদের সহজাত আকর্ষণ ও আগ্রহ দেখা যায়। এই প্রবণতা পরবর্তী যুগের গ্রীক গণিতজ্ঞদের মধ্যে স্পষ্ট হয়ে উঠেছে। আমাদের মনে হয়, গ্রীকদের কাছে জ্যামিতি কেবল উপপাদ্য-সম্পাদ্য রূপেই প্রতিভাত হয়নি; জ্যামিতির অন্য তাৎপর্য ছিল তাদের কাছে। থ্যালেসের মধ্যে এই বৈশিষ্ট্য তেমন স্পষ্টরূপে দেখা না দিলেও তিনিই জ্যামিতিতে **অবরোহী পদ্ধতির** প্রবর্তন করেন। আজ আমরা স্কুলে যে জ্যামিতি পড়ি, তা ইউক্লিডীয় জ্যামিতি। সাধারণভাবে এমন ধারণা আছে এর সব উপপাদ্য-সম্পাদ্য ইউক্লিডের আবিষ্কার। কিন্তু তা ঠিক নয়। ইউক্লিডের **এলিমেন্টস্**-কে প্রকৃতপক্ষে সংকলন গ্রন্থ বলা যায়। তিনি তাঁর পূর্ববর্তী ও সমসাময়িক গণিতজ্ঞদের আবিষ্কৃত তত্ত্ব ও তথ্যাদি সুপরিকল্পিত ও সুসংগঠিত আকারে লিপিবদ্ধ করেছেন মাত্র। কিন্তু এতে ইউক্লিডের প্রতিভা ম্লান হয়নি,—যথাস্থানে এ-বিষয়ে আলোচনা করা হবে। যাই হোক, জ্যামিতিতে কয়েকটি স্বীকার্যের আবিষ্কার ছাড়াও, থ্যালেসের অন্য অবদান আছে।

গ্রীক যুগের পূর্বে, মিশর, ব্যাবিলন ইত্যাদি দেশে, জ্যামিতি প্রধানত কঠিন বস্তু ও তল পরিমাপের ক্ষেত্রেই নিয়োজিত ছিল। থ্যালেস সর্বপ্রথম তুচ্ছ বাস্তবতার মধ্যে বিষয়টি আবদ্ধ না রেখে বিমূর্ত করে তুললেন। জ্যামিতিতে যুক্তি-তর্ক সহকারে প্রমাণের অবতারণা তাঁর মহৎ কীর্তি। এমনি করে গণিত ইন্দ্রিয়-প্রত্যক্ষের তুচ্ছতা থেকে মুক্ত হয়ে বিমূর্ত বিজ্ঞানধর্মী হয়ে উঠতে পেরেছে। থ্যালেসের এই অবদান বিশাল, গভীর ও তাৎপর্যপূর্ণ,—এর পরিমাপ ও মূল্যায়ণ দুঃসাধ্য বললে অত্যুক্তি হয় না। এই প্রসঙ্গে **D. E. Smith**-এর মন্তব্যটি স্মরণযোগ্য ঃ **"Without Thales there would not have been a Pythagoras—or such a Pythagoras ; and without Pythagoras there would not have been a Plato—or such a Plato."**[২]

থ্যালেসের নামে প্রচলিত স্বীকার্যগুলি প্রকৃতপক্ষে তাঁর আবিষ্কৃত কিনা, এ-বিষয়ে গণিতের ঐতিহাসিকদের মধ্যে যথেষ্ট মতভেদ আছে। পণ্ডিতেরা বিবাদ করুন লয়ে তারিখ সাল, আসল-নকল নিয়ে, আমরা এখানে তাঁর নামে প্রচলিত কয়েকটি সিদ্ধান্ত ও স্বীকার্যের উল্লেখ করলাম ঃ

(a) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুটি পরস্পর সমান।

২. History of Mathematics (vol-I)—D. E. Smith, Page-68

(b) দুটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করলে শিরঃ কোণ অর্থাৎ বিপ্রতীপ কোণ-গুলি পরস্পর সমান।

(c) যদি একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ ও একটি বাহু যথাক্রমে অপর ত্রিভুজের দুটি কোণ ও একটি বাহুর সমান হয়, তা হলে তারা সর্বসম হবে।

(d) ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দু-সমকোণ।

(e) সদৃশকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী।

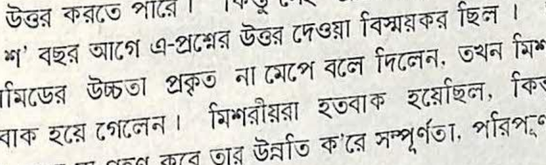
(f) ব্যাস দ্বারা যে-কোন বৃত্ত সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

(g) অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।

পিরামিডের উচ্চতা নির্ণয়

সবার জানা, প্রাচীনকালের সপ্তাশ্চর্যের অন্যতম পিরামিড। এই সৌধ সুবিশাল দেহ আর উচ্চতা নিয়ে যুগ যুগ ধরে মানুষের বিস্ময় উদ্রেক করে আসছে। না মেপে এর উচ্চতা কিভাবে নির্ণয় করা যায়, এ-ধরনের প্রশ্নের আজকাল মাধ্যমিক স্তরের ছাত্ররাও উত্তর করতে পারে। কিন্তু সেই প্রাচীনকালে আজ থেকে প্রায় ছাব্বিশ-সাতাশ শ' বছর আগে এ-প্রশ্নের উত্তর দেওয়া বিস্ময়কর ছিল। তাই যখন থ্যালেস পিরামিডের উচ্চতা প্রকৃত না মেপে বলে দিলেন, তখন মিশরীয় সম্রাট অ্যামেসিস হতবাক হয়ে গেলেন। মিশরীয়রা হতবাক হয়েছিল, কিন্তু গ্রীকরা হয়নি। কারণ, তারা যা গ্রহণ করে তার উন্নতি ক'রে সম্পূর্ণতা, পরিপূর্ণতা আনার চেষ্টা করে,—অনুকরণ করে না।

মিশরে জ্যামিতির উদ্ভব। থ্যালেস মিশরেই জ্যামিতি শিখেছিলেন। কিন্তু মিশরীয় পুরোহিতরা যে-বিদ্যা কাজে লাগাতে পারেননি, থ্যালেস তা-ই লাগালেন, —একটি জ্যামিতিক উপপাদ্য তথা সূত্রকে কাজে লাগিয়ে পিরামিডের উচ্চতা নির্ণয় করলেন। তবে ঠিক কিভাবে তিনি এই কাজটি করলেন, তা নিয়ে পণ্ডিতদের মধ্যে মতভেদ আছে। এখানে সম্ভাব্য একটি পদ্ধতির বর্ণনা দেওয়া হলো ঃ



চিত্র—৩

ধরা যাক,

H=পিরামিডের উচ্চতা,

b=ভূমি,

D=পিরামিডের ছায়ার দৈর্ঘ্য।

এখন, পিরামিড কর্তৃক প্রলম্বিত ছায়ার শেষ প্রান্তে বা ডগায় P একটি লাঠি দাঁড় করানো হলো। ধরা যাক, লাঠির ছায়ার দৈর্ঘ্য=d

থ্যালেসের কৃতিত্ব এই যে, তিনি H, b, D, P ও d-এর মধ্যে একটি সম্পর্ক স্থাপন করতে সমর্থ হন। আর এই সম্পর্ক বা সূত্রটির সাহায্যে পিরামিড-এর উচ্চতা নির্ণয় করেন।

চিত্রটির সঙ্গে মিলিয়ে দেখলেই বোঝা যায় মাটিতে দাঁড়িয়ে b, D, P ও d মাপা যায়। পাঁচটি অজ্ঞাত রাশির মধ্যে চারটি জ্ঞাত হলে পঞ্চমটি নির্ণয় করা এমন কিছু শক্ত নয়। থ্যালেস পিরামিডের উচ্চতা নির্ণয়ে নিম্নরূপ সূত্রটি ব্যবহার করেছিলেন বলে অনুমিত হয় ঃ

সূত্র ঃ $$H=\frac{P}{d}\left(\frac{1}{2}b+D\right)$$

শুধু পিরামিডের উচ্চতা নয়, সমুদ্রে অবস্থিত দূরের কোন জাহাজের দূরত্ব নির্ণয় করেছিলেন তিনি। আর এতে নিঃসন্দেহে সমানুপাতের সূত্র ব্যবহার করেছিলেন। আজ যে গণিতের সমৃদ্ধি, ঐশ্বর্য শতরূপে জ্ঞান-বিজ্ঞানের নানা শাখায় ব্যবহৃত হচ্ছে, তার বীজবপণ করেছিলেন সপ্তর্ষির অন্যতম থ্যালেস। একজন বাঙালী বিজ্ঞান লেখক সরস ভাষায় বলেছেন,—"তাঁরই হাতে বিশ হাজারী শ্লোকের ভারত কাব্য লক্ষ শ্লোকের মহাভারতের আকৃতি পেতে শুরু করে।"[৩]

৩. ভাষা গণিত—সাধন দাশগুপ্ত, পৃ—19

দ্বিতীয় অধ্যায়

জ্ঞানীশ্রেষ্ঠ পীথাগোরাস

(585—500 খ্রীস্টপূর্বাব্দ)

"Were it not for number and its nature, nothing that exists would be clear to anybody either in itself or in its relation to other things··· you can observe the power of number exercising itself not only in the affairs of demons and gods but in all the acts and the thoughts of men in all handicrafts and music."

—Philolaus.

প্রকৃতি ও মানব-সমাজে কোন ঘটনা বিচ্ছিন্ন বা সম্পর্কহীন হয়ে ঘটে না। কোন ঘটনা আপাত দৃষ্টিতে বিচ্ছিন্ন, সম্পর্কহীন ও বিশৃঙ্খল মনে হলেও গভীর-ভাবে বিশ্লেষণ করলে দেখা যায় বিশ্বের যাবতীয় ঘটনাবলীর মধ্যে একটা যোগসূত্র বা পূর্বাপর সম্বন্ধ আছে। পীথাগোরাস যে সময় জন্মগ্রহণ করেন তার ঐতিহাসিক পটভূমিকা স্মরণ করার মত। তখন ভারতে বুদ্ধ ও মহাবীর ব্রাহ্মণ্য ধর্মের বিরুদ্ধে জেহাদ ঘোষণা করে নতুন ধর্মমতের প্রবর্তন করছেন ; ভারতীয় দর্শন নতুন দিকে মোড় নিয়েছে, —মানুষের চিন্তা-ভাবনার রাজ্যে বিপ্লব সূচিত হচ্ছে। চীনেও কনফুসিয়াস ও লাও-সে নবতম ধর্মমত প্রচার করে নতুন সমাজ গঠনের প্রয়াস চালাচ্ছেন। আর সমগ্র গ্রীস নব উদ্দীপনায় জেগে উঠেছে। এ হেন পরিবর্তিত পরিস্থিতির মধ্যে পীথাগোরাস মরমীবাদী দর্শনের প্রতি বিশেষভাবে আকৃষ্ট হবেন, প্রাকৃতিক ঘটনাবলীর নতুন



পীথাগোরাস

ধরনের ব্যাখ্যা দেওয়ার প্রচেষ্টা পাবেন, তা তেমন বিস্ময়কর নয়। বস্তুত যুগ-মানসের হাওয়া লেগেছিল তাঁর সংবেদনশীল চেতনায়। সে-কারণে জ্ঞানার্জনের জন্য প্রকৃত গুরুর সন্ধানে একের পর এক দেশ পরিভ্রমণ করেছেন। কখনো এসেছেন মিলেটাসে থ্যালেসের কাছে, আবার কখনো ব্যাবিলনের পুরোহিত ও জ্ঞানীদের অমূল্য-ভাণ্ডার করায়ত্ত করার প্রয়াস পেয়েছেন। আবার গেছেন মিশরে,—সেখানে পুরোহিতদের কাছে রহস্যবাদের দীক্ষা, গণিত-জ্যামিতি-জ্যোতির্বিজ্ঞানের পাঠ নিয়েছেন। কিন্তু এতেও তাঁর সূক্ষ্ম মরমী মনের তৃষ্ণা নিবারিত হয়নি। ছুটে এসেছেন ভারতে দুর্গম-গিরি-কান্তার-মরু সাত সমুদ্র পার হয়ে। অধ্যাত্মবাদ ও দর্শনের নব নব প্রেরণা ও উদ্দীপনা লাভ করে অবশেষে ফিরে গেছেন জন্মভূমি **সামোস**-এ। কিন্তু এখানে দীর্ঘদিন থাকতে পারেননি। অত্যাচারী পলিক্রেটিসের জন্য তাঁকে সামোস ত্যাগ করে দক্ষিণ ইটালীর ক্রোটন-এ গিয়ে বাস করতে হয়। আর এখানেই তিনি প্রতিষ্ঠা করেন নিজস্ব ধ্যান-ধারণা চরিতার্থ করার জন্য বিদ্যাপীঠ,—**ভ্রাতৃসঙ্ঘ**।

কিংবদন্তীময় পীথাগোরাস

পীথাগোরাসের ব্যক্তিগত জীবনের সঠিক কোন কাহিনী পাওয়া যায় না, তিনি বিশেষ কোন-কিছু লিখেও যাননি। পরবর্তীকালে প্লেটো ও ঐতিহাসিক হেরোডটাসের লেখা থেকে সামান্য মাত্র জানা যায়। আনুমানিক 585 খ্রীস্টপূর্বাব্দের কাছাকাছি সময়ে তিনি **সামোস** দ্বীপে জন্মগ্রহণ করেন। জ্ঞানার্জনের জন্য মিলেটাস, ব্যাবিলন, মিশর, এমন কি ভারতেও আসেন। তাঁর ভারতভ্রমণ সম্পর্কে পণ্ডিতরা সবাই একমত না হলেও অনেক পাশ্চাত্য পণ্ডিত স্বীকার করেন, আর স্বামী বিবেকানন্দের লেখায় উল্লেখ আছেঃ **"Pythagoras came to India and studied this philosophy** (Sankhya), **and that was the beginning of the philosophy of the Greeks."**[১] (বন্ধনীর মধ্যে লেখা লেখকের) তাঁর জীবনের দীর্ঘদিন কাটে **ক্রোটন**-এ। এখানে ভ্রাতৃসঙ্ঘ প্রতিষ্ঠা করে ধর্ম-দর্শন-বিজ্ঞান বিষয়ে শিক্ষা দিতে থাকেন। কৃচ্ছ্রসাধনের মধ্য দিয়ে এই সঙ্ঘের সভ্যদের চলতে হতো, আর ব্যক্তিপরিচয় দেওয়ার রীতি এদের ছিল না। তাদের সব মতবাদ ও অনুসন্ধান দলীয় নেতার নামেই প্রচারিত হতো। এই সম্প্রদায়ের সঙ্গে যে রাজনীতির ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক ছিল, তা আগেই উল্লেখ করা হয়েছে। বস্তুত, এই রাজনৈতিক কারণেই এদের সঙ্ঘ ধ্বংস হয়। ক্রোটনে গণতন্ত্রী দল ক্ষমতায় অধিষ্ঠিত হওয়ার পর থেকেই এদের প্রতিপত্তি হ্রাস পেতে থাকে। তারপর আনুমানিক 450 খ্রীস্টপূর্বাব্দে এই ভ্রাতৃসঙ্ঘের 40 জন সভ্য এক গুরুভ্রাতার গৃহে

১. উদ্ধৃতিটি Dr. K. R. Chakravorti-র 'Science Based on Symmetry' গ্রন্থ থেকে নেওয়া হয়েছে।

সমবেত হওয়ার সময় বিরুদ্ধপক্ষীয়রা অগ্নিসংযোগ করে হত্যা করে। এই একটি-মাত্র ঘটনা ও অনুরূপ ঘটনা ঘটতে থাকায় পীথাগোরীয়রা গ্রীসের অন্যত্র ছড়িয়ে পড়ে। পীথাগোরাস 497 খ্রীস্টপূর্বাব্দে নিকটবর্তী মেটাপনটাম-এ (**Metapontum**) পালিয়ে যান, আর এখানেই শত্রু কর্তৃক নিহত হন বলে অনুমান করা হয়।

পীথাগোরাসের নাম, মতবাদ ইত্যাদি নিয়ে রহস্যময়তা আছে। তাঁর নামে যে-সব আবিষ্কার প্রচলিত আছে, সত্যসত্যই তিনি সে-সব আবিষ্কার করেছিলেন কিনা এ-নিয়েও মতপার্থক্য আছে। কিন্তু একটি কথা স্বীকার করতে হবে, প্রাচীনকালের এই বিজ্ঞানী ও গণিতজ্ঞ প্রকৃত মৌলিক প্রতিভার অধিকারী ছিলেন। তাঁর প্রতিভার যাদু স্পর্শে গণিত, সংখ্যাতত্ত্ব, জ্যামিতি, জ্যোতির্বিজ্ঞান, শব্দবিজ্ঞান আর দর্শন নব নব প্রেরণা ও উদ্দীপনা লাভ করে। থ্যালেসের প্রতিভাধর এই ছাত্রটি ব্যবহারিক বিদ্যার অধঃস্তল থেকে গণিত ও বিজ্ঞানকে প্রকৃত মননশীলতার পর্যায়ে উন্নীত করেন। পরবর্তী গ্রীকরা যে বিমূর্ত চর্চার জন্য প্রশংসিত হয়েছেন, তার জন্য পীথাগোরাস বা ওই সম্প্রদায় কম প্রশংসার পাত্র নন। দীর্ঘদিনের দুর্গম পথ সুগম করে এই সম্প্রদায় মানবসভ্যতা ও সংস্কৃতির ইতিহাসে বিশিষ্ট অবদান রেখে গেছেন।

গণিত সম্পর্কে ধারণা

বিশ্বের আদি প্রাচীন দেশগুলিতে গণিত ছিল প্রধানত ইন্দ্রিয়-প্রত্যক্ষ চিন্তার বিষয়,—বিশুদ্ধ বিমূর্ত চিন্তন ওইসব দেশে দেখতে পাওয়া যায় না। মিশর, ব্যাবিলন, ভারতীয় গণিতে সংখ্যা সম্বন্ধে বিমূর্ত চিন্তন ছিল, কিন্তু তা সুষ্ঠু ও সচেতন বলে মনে হয় না। আমরা বহুবার বলেছি, বিমূর্ত চিন্তনের প্রতি আকর্ষণ গ্রীকদের অন্যতম প্রধান বৈশিষ্ট্য,—বিশেষত জ্যামিতিতে এই চিন্তনের পূর্ণ প্রতিফলন দেখতে পাওয়া যায়। গ্রীকরা যাদের কাছে জ্যামিতির প্রথম পাঠ নিয়েছিল, সেই মিশরীয়দের কাছে জ্যামিতি ছিল একান্ত ব্যবহারিক বিষয়। যেমন,—**সরলরেখা** বলতে তারা **সম্প্রসারিত রজ্জু** বা দড়ি বুঝত ; **আয়তক্ষেত্র** তাদের কাছে জমির **আকৃতি** ছাড়া আর কিছু নয়, এর **বাহু** জমির **আল** বা **দিক** অতিক্রম করতে পারেনি। পীথাগোরীয়রা চিন্তার এই দুর্বলতা ও দৈন্য কাটিয়ে উঠতে পেরেছিল।

থ্যালেসের সময় থেকে বিমূর্ত চিন্তাশক্তির বিকাশ দেখা গেলেও পীথা-গোরীয়দের মধ্যে এর আরো সুস্পষ্ট প্রকাশ দেখতে পাওয়া যায়। প্রথম দিকের পীথাগোরীয়দের মধ্যে এই বৈশিষ্ট্যের প্রকাশ তেমন স্পষ্ট না হলেও পরবর্তীকালের এই সম্প্রদায়ের মধ্যে সচেতন বিমূর্ত চিন্তার প্রকাশ দেখা যায়। প্রথম দিকের এই সম্প্রদায় এই অভিমত পোষণ করত যে, সমস্ত বস্তু অখণ্ড সংখ্যা দ্বারা গঠিত,—সংখ্যাই বিশ্বব্রহ্মাণ্ডের সারবস্তু, নির্যাস। বর্তমানে আমরা যেমন বলি, সব বস্তু

পরমাণু দ্বারা গঠিত, ঠিক এরূপ অর্থেই তারা সংখ্যা ব্যবহার করত। প্রাচীনকালের বিখ্যাত গণিতের ঐতিহাসিক ইউডিমাস (Eudemus) বলেন, পীথাগোরীয়রাই বিশুদ্ধ গণিতের স্রষ্টা। তাদের মূলমন্ত্র,—"Everything is arranged according to Number." ইতিমধ্যে পাঠক-পাঠিকা এই সম্প্রদায়ভুক্ত এক গণিতজ্ঞের অভিমত শুরুতেই লক্ষ করে থাকবেন। ফিলোলাউস এই কথার পুনরুক্তি করেছেন বলা যায়।

এই সম্প্রদায় রহস্যবাদী তথা মরমীবাদী হওয়ায় সংখ্যায় রহস্য আরোপ তাদের একটি বৈশিষ্ট্য বলে গণ্য করা হয়। পূর্ণসংখ্যা অর্থাৎ স্বাভাবিক সংখ্যার মধ্যে তারা নানা অর্থ ও তাৎপর্য আবিষ্কার করেছিল। সংখ্যার শুভ ও অশুভ, কল্যাণ ও অকল্যাণকর দিকটি আশ্চর্যভাবে এখনো বর্তমান। ভারতে সংখ্যা নিয়ে ভাবনা-চিন্তার ইতিহাসও খুব প্রাচীন। পরে আমরা এ-সম্পর্কে সংক্ষিপ্ত আলোচনা করব। পীথাগোরীয়রা এক সংখ্যার (1) সঙ্গে **বিচারশক্তি** বা **প্রজ্ঞার** (reason) অভেদত্ব কল্পনা করত। কারণ, প্রজ্ঞা বা বিচারশক্তির মাধ্যমেই **সমগ্র**-এর (whole) ঠিকানা পাওয়া যায়। **দুই** (2) (opinion) **অভিমত**-এর (opinion) প্রতীক ; **তিন** (3) উর্বরতা, **চার** (4) ছিল ন্যায়পরায়ণতার প্রতীক। **পাঁচ**-এর (5) তাৎপর্য নিহিত ছিল **বিবাহে** ; কারণ, পাঁচ প্রথম যুগ্ম ও অযুগ্ম সংখ্যার মিলনসঞ্জাত (5=2+3)। ছয় (6) শৈত্যের কারণ, **সাত** (7) স্বাস্থ্যের আর **আট** (8) ভালবাসা ও বন্ধুত্বের প্রতীকরূপে পরিগণিত হতো। যুগ্ম-সংখ্যা স্ত্রী ও অযুগ্ম-সংখ্যায় পুরুষ-গুণ আরোপিত হতো। তাছাড়া যুগ্ম-সংখ্যা অশুভ ও অযুগ্ম-সংখ্যা শুভ বলে মনে করা হতো। সংখ্যায় এরূপ রহস্য আরোপ প্রাচীন চীনা গণিত গ্রন্থেও দেখা যায়। এরূপ মনে করা হয়, পীথাগোরাস এই ধারণা চীনাদের কাছ থেকে পেয়েছিলেন। যুগ্ম-সংখ্যার প্রতি এরূপ বিরূপ মনোভাব পোষণের কারণ সম্ভবত এই সংখ্যাকে অনির্দিষ্টভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করা যায়। গ্রীক-মনে অনির্দিষ্টের স্থান ছিল না, তারা নির্দিষ্ট ও সীমিত-র পক্ষপাতী ছিল। যেমন,—8-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে 4 ও 4 পাওয়া যায়, 4-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে 2 ও 2 পাওয়া যায়, আবার 2 থেকে 1 ও 1 পাওয়া যায়। কিন্তু অযুগ্ম-সংখ্যার এরূপ অনির্দিষ্টতা নাই,—সে যেন অজর, অমর।

ষড়ভুজী ঘনবস্তুর মধ্যে **পৃথিবী**-র রহস্য নিহিত আছে ; পিরামিডের মধ্যে আগুন, আর দ্বাদশভুজী ঘনবস্তু স্বর্গীয় বলেও তারা মনে করত। এমন কি সংখ্যার সঙ্গে জ্যামিতিক ধারণাও বিজড়িত করত পীথাগোরীয়রা। তারা 1-কে **বিন্দু**, 2-কে **রেখা**, 3-কে **ক্ষেত্র**, 4-কে **দেশ** (space) বলে গণ্য করত।

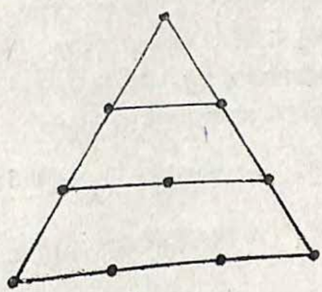
বস্তুতপক্ষে, প্রথম যুগের পীথাগোরীয়দের গণিত-ভাবনা তাদের ধর্মীয় ও দার্শনিক ভাবনা নিরপেক্ষ নয় ; হয়তো তা তখনকার সমাজ কাঠামো ও ভাবনার সঙ্গে সামঞ্জস্যপূর্ণ ছিল। এ-সম্পর্কে একজন বিখ্যাত গণিত লেখকের উক্তি ঃ

The audiences of Pythagoras wanted charades. He gave them brighter and better charades.[২] চার (4)-এর যাদুমন্ত্রে মোহিত হয়ে পীথাগারীয়রা বলত,—Bless us, divine number, who generatest Gods and men, O holy *tetraktys*, that containest the root and source of the eternally flowing creation."[৩]

গণিত নিয়ে চিন্তা

পীথাগোরীয়দের ধর্মমত ও দার্শনিক মতবাদ নানা রহস্য ও কুসংস্কারে আচ্ছন্ন হলেও এর মাধ্যমে তারা যেটুকু গণিতচর্চা করে গেছে গণিতের ইতিহাসে তার মূল্য অবশ্যই স্বীকার করতে হবে। তাদের গবেষণা প্রধানত সংখ্যাতত্ত্ব নিয়ে। সংখ্যা-গঠন ও তাদের নানা ধর্ম আবিষ্কার এই সম্প্রদায়ের গণিতে অন্যতম অবদান। বলা যেতে পারে, এই সম্প্রদায় সংখ্যা নিয়ে খেলায় মেতে উঠেছিল। তারা পাথরের নুড়ি সাজিয়ে সাজিয়ে সংখ্যা প্রকাশ করত বা বালির ওপর আধুনিক ডট চিহ্ন দিয়ে সংখ্যা গড়ে তুলত। এই নুড়ি বা ডট-এর আকার দেখে সংখ্যার শ্রেণী বিভাগ করত।

1, 3, 6 ও 10 সংখ্যক নুড়ি সাজিয়ে যে চিত্রটি পাওয়া যেত, তা ত্রিভুজাকার বলে, এই সংখ্যার নাম ছিল ত্রিভুজ-সংখ্যা। 10টি নুড়ি সাজানো ত্রিভুজ-সংখ্যাটি তাদের খুবই প্রিয় ছিল। কারণ, এই ত্রিভুজের প্রতি বাহুতে 4টি করে ডট বা নুড়ি থাকতে পারে, আর তা যে তাদের কীরূপ শ্রদ্ধার ছিল তা আগেই বলা হয়েছে। এ-সম্বন্ধে একটি গল্প আছে: একবার এক বণিক পীথাগোরাসকে জিজ্ঞাসা করল,—'আপনি আমায় কি শেখাতে পারেন?' পীথাগোরাস বললেন,—'আমি তো মা য় গুণতে শেখাতে পারি।' বণিক বলল—'তা আমি জানি।' পীথাগোরাস বললেন, —'তুমি কিভাবে গণনা কর?' বণিক—'এক, দুই, তিন, চার,......।' অমনি পীথাগোরাস চিৎকার করে বলে উঠলেন,—"থাম, থাম, তুমি যাকে চার বলছ তা প্রকৃতপক্ষে দশ। এটা একটি পরিপূর্ণ ত্রিভুজ, আর আমাদের প্রতীক।" পীথাগোরীয়দের এই অতি প্রিয় ত্রিভুজ সংখ্যাটির চিত্ররূপ চিত্র—৪-এর ন্যায়।



চিত্র—৪

ত্রিভুজ-সংখ্যার গঠন ও চরিত্র সম্বন্ধে পীথাগোরীয়রা পুরোপুরি অবহিত ছিল

২. Mathematics for the Million—L. Hogben, Page-190

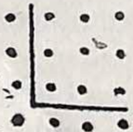
৩. Ibid., Page—190-191

বলেই মনে হয়। 1, (1+2), (1+2+3) ইত্যাদির সমষ্টিগুলি ত্রিভুজ-সংখ্যা গঠন করে। সুতরাং নিম্নরূপ সূত্রটি তাদের অজানা ছিল বলে মনে হয় না ঃ

$$1+2+3+4 \cdots +n=\frac{n(n+1)}{2}$$

বর্গাকারে নুড়ি সাজিয়ে তারা যে-সব সংখ্যা পেল, তাদের নাম দেওয়া হলো **বর্গসংখ্যা**। 1, 4, 9, 16, 25 ইত্যাদি বর্গ-সংখ্যা। অবর্গ মিশ্র-সংখ্যাদের নাম দেওয়া হলো **আয়ত-সংখ্যা** (**oblong**)।

পীথাগোরীয়রা আর এক ধরনের বর্গ-সংখ্যা আবিষ্কার করেছিল,—তার নাম **শঙ্কু-সংখ্যা** (**gnomon**)। প্রাচীন ভারতেও এই শঙ্কুর ব্যবহার দেখা যায়,— শুল্বযুগে এর সাহায্যে পূর্ব-পশ্চিম রেখা নির্ণয় করা হতো, আর পরবর্তীকালে ছায়াগণিতে এর বহুল ব্যবহার দেখা যায়। ব্যাবিলনেও এই শঙ্কুর ব্যবহার ছিল। চিত্রে বাঁদিকের রেখার ডট ও তার নিম্নরেখার ডট শঙ্কু-সংখ্যার সজ্জিত রূপ ঃ



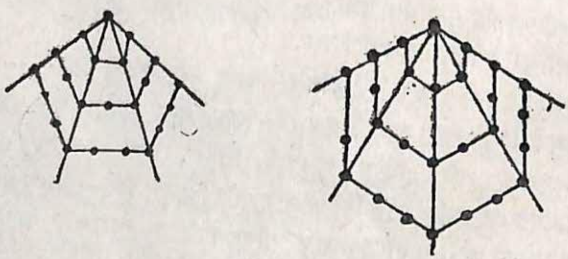
চিত্র—৫

এরূপ সংখ্যা-গঠনে $n^2+(2n+1)=(n+1)^2$ সূত্রটি ব্যবহৃত হতে দেখা যায়।

ক্রোটনের এই রহস্যবাদী সম্প্রদায় **বহুভুজ-সংখ্যা** নিয়েও অনুসন্ধান চালায়। এভাবে তারা পঞ্চভুজ, ষড়ভুজ ইত্যাদি সংখ্যার নামকরণ করে। চিত্রে পঞ্চভুজী ও ষড়ভুজী সংখ্যার সজ্জিত রূপ দেখানো হয়েছে। এখানে পঞ্চভুজ-সংখ্যার প্রথম সংখ্যা বা ডট বা নুড়ি 1, দ্বিতীয়টির সংখ্যা 5, তৃতীয়টির 12 ইত্যাদি। ষড়ভুজ-সংখ্যার ক্ষেত্রে প্রথমটি 1, দ্বিতীয়টির সংখ্যা 6, তৃতীয়টির 15, চতুর্থটির 28 ইত্যাদি। আধুনিক সঙ্কেতে প্রকাশ করলে,

$$n\text{-তম পঞ্চভুজ-সংখ্যা}=\frac{n(3n-1)}{2}$$

$$n\text{-তম ষড়ভুজ-সংখ্যা}=n(2n-1)$$



চিত্র—৬

পীথাগোরীয়রা সংখ্যার জ্যামিতিক ধর্মে বিশেষরূপে আকৃষ্ট হয়েছিল সত্য,

কিন্তু তা থেকে অখণ্ড সংখ্যার কয়েকটি ধর্মের পরিচয়ও পাওয়া যায়। যেমন,— **দুইটি ক্রমিক ত্রিভুজ-সংখ্যার সমষ্টি বর্গ-সংখ্যা।** উদাহরণস্বরূপ,—

$$1+3=4=2^2\ ;\ 3+6=9=3^2$$

তাদের মতে **পরিপূর্ণ** বা **সম্পূর্ণ**—সংখ্যা (**Perfect**) সেইগুলি যাদের উৎপাদকগুলির সমষ্টি সংখ্যাটির সমান। 6, 28, 496 ও 8128 পরিপূর্ণ বা সম্পূর্ণ সংখ্যার উদাহরণ। কারণ, $6=1+2+3$; $28=1+2+4+7+14$

এ ছাড়া ছিল **সংখ্যা-সখা** (amicable number)। এরা এমন এক এক জোড়া সংখ্যা যাদের একটির উৎপাদকগুলির সমষ্টি অপর রাশির সমান, আবার অপরটির উৎপাদকগুলির সমষ্টি অন্য রাশির সমান। পীথাগোরাস 220 ও 284 সংখ্যা দুটি সংখ্যা-সখা বলে ঘোষণা করেন। কারণ, 220 সংখ্যার উৎপাদকগুলির সমষ্টি $(1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110)=284$, আর 284-র উৎপাদকগুলির সমষ্টি $(1+2+4+71+142)=220$

কেবলমাত্র কয়েকটি জ্যামিতিক সংখ্যাই নয়, **মৌলিক সংখ্যা**, প্রগতি ও সৌন্দর্যসুষমামণ্ডিত অনুপাত ও সমানুপাত বিষয়ে তাদের অনুসন্ধানও আছে। p ও q দুটি সংখ্যা হলে, তাদের গবেষণা থেকে জানতে পারা যায়,—

(a) সমান্তর মধ্যক $=\dfrac{p+q}{2}$

(b) গুণোত্তর মধ্যক $=\sqrt{pq}$

(c) বিপরীত মধ্যক $=\dfrac{2pq}{p+q}$

উপরের মধ্যকগুলি যথাক্রমে **A, G ও H** হলে, নিম্নরূপ সমানুপাত পরিপূর্ণ বা সম্পূর্ণ (Perfect) বলে বিবেচিত হতো ঃ

$$\frac{A}{G}=\frac{G}{H}$$

আবার, $p. : \dfrac{p+q}{2}=\dfrac{2pq}{p+q} : q$,—এই সমানুপাত সঙ্গীতানুপাত বলে এই সম্প্রদায় মনে করত।

সঙ্গীত ও গণিত

সঙ্গীত নিয়ে সর্বপ্রথম পরীক্ষা-নিরীক্ষা করেছিলেন পীথাগোরাস। কিভাবে সঙ্গীতে আকৃষ্ট হলেন তিনি তা নিয়ে একটি কাহিনী লিখে রেখে গেছেন পরবর্তীকালের রোমান গণিতজ্ঞ **বোয়েথিয়াস**। গল্পটি এরকম ঃ

পীথাগোরাস রাস্তা দিয়ে চলেছেন। রাস্তার পাশে একটি কামারশাল। কামার কাজ করে চলেছে—বিভিন্ন ওজনের হাতুড়ি দিয়ে ঘা মারছে। ওই হাতুড়ির আঘাতে উৎপন্ন শব্দের মধ্যে পীথাগোরাস সুরের সন্ধান পেলেন। তাঁর মনে হলো আঘাতের তারতম্যের জন্যে সুর সৃষ্টি হচ্ছে। তিনি কামারদের হাতুড়ি পরিবর্তন করতে বললেন। কিন্তু তাতে শব্দ বা সুরে পার্থক্য দেখা গেল না। তখন তাঁর মনে হলো, হাতুড়িই সুর সৃষ্টির কারণ, মানুষের দৈহিক শক্তি নয়। কিন্তু তাঁর পর্যবেক্ষণ বা পরীক্ষা এখানেই শেষ হলো না। তিনি কামারদের হাতুড়িগুলি ওজন করতে বললেন। তখন দেখা গেল,—হাতুড়িগুলি **12**, **9**, **8** ও **6** সংখ্যার অনুপাত। ভারী বা বড় হাতুড়ি থেকে ধরলে পীথাগোরাস সঙ্গীতের যে-সুর শুনেছিলেন, তাদের নাম যথাক্রমে 'চতুর্থ', 'পঞ্চম' ও 'অষ্টক'।

বোয়েথিয়াস লিখেছেন, পীথাগোরাস সঙ্গীত নিয়ে গবেষণা করেছিলেন। একটি তারের দৈর্ঘ্য 12 একক হলে, চতুর্থ সুর বাজবে তারের দৈর্ঘ্য 9 একক হলে, পঞ্চম সুর বাজবে 8 একক হলে এবং অষ্টক বা অক্টেভ বাজবে দৈর্ঘ্য 6 একক হলে। সঙ্গীতের ইতিহাসে তারের দৈর্ঘ্য ও সুরের তীক্ষ্ণতা নিয়ে স্থূল পরীক্ষার বর্ণনা এটাই সম্ভবত প্রথম। নানা সুর মিলে সমমেল সৃষ্টি করে। বস্তুত, 6, 8, 9 ও 12 সংখ্যাগুলি ছিল **হারমনিক সংখ্যা (Harmonic Number)**।

ঘনক তাদের কাছে কেবল ঘনক ছিল না—ছিল সুসমঞ্জস্য বস্তু (**Harmonic body**)। কারণ, ঘনকের মধ্যে হারমনিক সংখ্যার উপস্থিতি দেখা যায়। ঘনকের 6টি তল, 8টি শীর্ষবিন্দু ও 12টি প্রান্তিকী। আবার, 6, 8, 9 ও 12-এর মধ্যে **9** হচ্ছে 6 ও 12-এর **সমান্তরীয় মধ্যক**। আরো এক সম্পর্ক,

$$\frac{6}{8}=\frac{9}{12} \text{ এবং } \frac{6}{9}=\frac{8}{12}$$

একটি গুরুত্বপূর্ণ আবিষ্কার

বর্তমানে আমরা নানা ধরনের সংখ্যার কথা জানি। কিন্তু পীথাগোরাসের সময় এ-সব সংখ্যার অস্তিত্ব ছিল না। তাদের কাছে সংখ্যা মানেই অখণ্ড সংখ্যা। এমন কি, দুইটি অখণ্ড সংখ্যার অনুপাত যে ভগ্নাংশ হয়, তা-ও তারা স্বীকার করত না। বস্তুত তাদের গাণিতিক সাধনা অখণ্ড সংখ্যাকে কেন্দ্র করেই আবর্তিত হয়েছিল। কিন্তু এই সম্প্রদায় সঙ্কটে পড়ল যখন তারা সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহুর অনুপাত বা বর্গক্ষেত্রের কর্ণ ও একটি বাহুর অনুপাত কোন-ক্রমেই অখণ্ড সংখ্যার সাহায্যে প্রকাশ করতে পারল না। ইতিমধ্যে তারা সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে অনেক ত্রয়ী-সংখ্যা আবিষ্কার করেছিল। আরো ত্রয়ী-র অনুসন্ধান করতে গিয়ে তারা এই সঙ্কটের সম্মুখীন হয়ে থাকবে

বলে অনুমানও করা হয়। যে-সব অনুপাত অখণ্ড সংখ্যা দ্বারা প্রকাশযোগ্য, অর্থাৎ যে-সব সংখ্যা সাধারণ একক-এ (**Common unit**) পরিমাপযোগ্য, তাদের বলা হলো প্রমেয় (**Commensurable**), আর সাধারণ এককে যে সব সংখ্যা পরিমাপযোগ্য নয়, তাদের বলা হলো অমেয় (**Incommensurable**)। অমেয় রাশির অনুপাতকে বলা হতো অপ্রকাশযোগ্য (**algos**)।

গণিতের ইতিহাসের অমেয় অর্থাৎ অমূলদ রাশি আবিষ্কার অতীব গুরুত্বপূর্ণ হলেও পীথাগোরীয়রা এই অভূতপূর্ব সংখ্যার অস্তিত্ব মেনে নিল না। কারণ,—এই সংখ্যা তাদের দার্শনিক মতবাদের মূলে আঘাত হানল। ফলে, তারা এটা গোপন করার প্রয়াস পেল। এই নিয়ে বিরোধ শুরু হলো ওই সম্প্রদায়ের হিপাসাস-এর (**Hippasus**) সঙ্গে। প্রবল প্রতাপশালী ওই সম্প্রদায়ের বেশীর ভাগ সভ্যের সঙ্গে হিপাসাস এঁটে উঠতে পারলেন না। হিপাসাসের অপরাধ ছিল তিনি ওই সম্প্রদায়ভুক্ত হয়েও আবিষ্কৃত তথ্য গোপন রাখতে পারেন নি। তা ছাড়া নিষিদ্ধ অমূলদ রাশি সম্পর্কে তিনি গবেষণাও করেছিলেন। টরেনটাম-বাসী এই গণিতজ্ঞকে এই অপরাধে ভ্রাতৃসঙ্ঘ থেকে বহিষ্কার করা হয়, এবং সম্ভবত জলে ডুবিয়ে হত্যা করা হয়।

জ্ঞান-বিজ্ঞানের ইতিহাসে এমন বিষাদময় ঘটনা দুর্লভ নয়। দেখা গেছে, যুগে যুগে নতুন ভাবনা-চিন্তা নিয়ে যাঁরা অগ্রসর হয়েছেন, প্রচলিত চিন্তা ধারার বিরোধিতা করেছেন, তাঁরাই লাঞ্ছনা, নির্যাতন ও উৎপীড়ন লাভ করেছেন। সাময়িক-ভাবে তাঁদের যুগান্তকারী চিন্তা-ভাবনা অবহেলিত ও উপেক্ষিত হলেও তার মৃত্যু ঘটেনি, কোন-না-কোন সময় মানুষের মনে আলোড়ন তুলে আবির্ভূত হয়েছে। অনুমান করা হয়, হিপাসাস $\sqrt{2}$ ও $\sqrt{5}$ সম্পর্কিত কিছু তত্ত্ব আবিষ্কার করেন। যাই হোক, পীথাগোরীয়রা কিভাবে $\sqrt{2}$-এর অমেয়ত্ব প্রমাণ করেছিল, তার একটি প্রমাণ এখানে বর্ণনা করা হলো। মহামতি অ্যারিস্টটলের মতে এটি পরোক্ষ বা অপ্রত্যক্ষ প্রমাণ,—***reductio ad absurdum.***

ধরা যাক, সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহুর অনুপাত= $\alpha : \beta$, এবং এটি লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশিত। সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে লেখা যায়,—

$$\alpha^2 = 2\beta^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

এখন, α^2 যুগ্ম হওয়ায় α অবশ্যই যুগ্ম হবে। কারণ,—যুগ্ম-সংখ্যার বর্গ সর্বদাই যুগ্ম, এবং অযুগ্ম-সংখ্যার বর্গ সর্বদাই অযুগ্ম হয়। সুতরাং $\alpha : \beta$ লঘিষ্ঠ আকারে থাকায় β অবশ্যই অযুগ্ম-সংখ্যা।

যেহেতু, α যুগ্ম, অতএব মনে করা যাক,

$$\alpha = 2\gamma$$

বা, $$\alpha^2 = 4\gamma^2 \ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

(a) ও (b) থেকে $2\beta^2 = 4\gamma^2$

বা, $\beta^2 = 2\gamma^2 \ldots\ldots (c)$

(c)—সম্পর্কটিতে β যুগ্ম বলে প্রতিপন্ন হচ্ছে। কিন্তু β একই সঙ্গে যুগ্ম ও অযুগ্ম দুই-ই হতে পারে না। এটি স্ববিরোধী। সুতরাং এরূপ প্রমাণিত হলো যে, $\alpha : \beta$ অমেয় বা অমূলদ রাশি।

মিশরীয় ও ব্যাবিলনীয় গণিতজ্ঞরা এরূপ সংখ্যার প্রকৃতি ও স্বরূপ উপলব্ধি করতে পারেনি। অবশ্য ব্যাবিলনীয়রা **ষাঁঠক পদ্ধতি**-র সাহায্যে এ-ধরনের সংখ্যার আসন্ন মান নির্ণয়ের প্রয়াস পেয়েছিল। কিন্তু প্রাচীন ভারতের গণিতজ্ঞরা অমেয় বা অমূলদ রাশি অস্বীকার করেনি। শূল্বসূত্রে এর দৃষ্টান্তের অভাবও নেই।* পীথাগোরীয়রা এই আবিষ্কার স্বীকার নাই করুক, কিন্তু গণিতের ইতিহাসে এর বিশেষ স্থান আছে। এই প্রসঙ্গে **E. T. Bell** তাঁর *Men of Mathematics* গ্রন্থে বলেছেন,—"**In this discovery Pythagoras found the taproot of modern mathematical analysis.**"

গ্রীক গণিতের সবচেয়ে বড় অবদান হচ্ছে স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক চিন্তা-ভাবনার অবতারণা, আর তার সাহায্যে নৈয়ায়িক ক্ষুরধারে গাণিতিক ফললাভ। পীথাগোরীয়রা এরূপ চিন্তা-ভাবনা করেছিল কিনা গণিতের ইতিহাসের আলোচনায় এমন প্রশ্ন স্বাভাবিকভাবেই উঠতে পারে। কিন্তু একটা কথা আমাদের সব সময় স্মরণ রাখতে হবে যে, পীথাগোরীয়রা গ্রীক গণিতের আদিপর্বের অন্তর্গত। সুতরাং এমন ভাবনা তাদের মধ্যে থাকলেও সচেতন ও সুস্পষ্টরূপে ছিল না। তবুও তাদের গাণিতিক চিন্তায় স্বতঃসিদ্ধ ছিল, জ্যামিতিক প্রমাণে অবরোহী পদ্ধতির প্রয়োগও দেখা যায়। প্রোক্লাসের মন্তব্য থেকে জানতে পারা যায়, ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ,—এইটি তারা জানত ; আর সমকোণী ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্যটির অস্তিত্ব সম্পর্কে তো কোন বিতর্কই নেই। কিন্তু এর প্রমাণ তাদের জানা ছিল কিনা এ-নিয়ে সন্দেহ আছে। পরবর্তীকালের গণিতজ্ঞদের উক্তি থেকে জানা যায়, **এলিমেন্টস** গ্রন্থের প্রথম খণ্ডের 47 নং প্রমাণটি স্বয়ং ইউক্লিডের। গণিতের ঐতিহাসিকদের মতে, পীথাগোরীয়রা গণিতে সাধারণ প্রমাণাদি বিষয়ে সচেতন ছিল না,—বিশেষ বিশেষ প্রমাণ তারা জানত।

জ্যামিতির ক্ষেত্রে তাদের অবদান সুস্পষ্টরূপে চিহ্নিত করা খুবই কঠিন। তবুও নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে তাদের অবদান আছে বলে মনে করা হয়।

(a) রেখা, কোণ, তল ইত্যাদির সংজ্ঞা নিরূপণে তাদের অবদান আছে।

(b) সমান্তরাল সরলরেখা, ত্রিভুজ, বহুভুজ, বৃত্ত, গোলক ও সুষম বহুতল সম্পর্কিত উপপাদ্য তাদের আবিষ্কার।

* এ-বিষয়ে বিস্তারিত আলোচনা লেখকের 'প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিবৃত্ত' গ্রন্থে দ্রষ্টব্য।

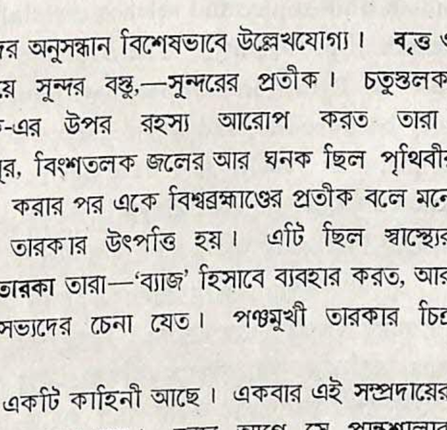
(c) ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি 180° তারা জানত।

(d) সমবাহু ত্রিভুজ, বর্গক্ষেত্র, সুষম ষড়ভুজ দ্বারা যে কোন ক্ষেত্র বা তল পূর্ণ করা যায়,—এ-বিষয়ে তাদের স্পষ্ট ধারণা ছিল।

(e) কোন বহুভুজের ক্ষেত্রফলের সমান বহুভুজ অঙ্কন তাদের অজ্ঞাত ছিল না। কোন আয়তক্ষেত্রের সমান বর্গক্ষেত্র অঙ্কন সমস্যাটি নাকি স্বয়ং পীথাগোরাস সমাধান করেছিলেন।

ঘনবস্তু সম্বন্ধে পীথাগোরীয়দের অনুসন্ধান বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য। **বৃত্ত ও গোলক** ছিল তাদের চোখে সবচেয়ে সুন্দর বস্তু,—সুন্দরের প্রতীক। চতুস্তলক, অষ্টতলক, বিংশতলক ও ঘনক-এর উপর রহস্য আরোপ করত তারা। চতুস্তলক আগুনের, অষ্টতলক বায়ুর, বিংশতলক জলের আর ঘনক ছিল পৃথিবীর প্রতীক। দ্বাদশতলক আবিষ্কার করার পর একে বিশ্বব্রহ্মাণ্ডের প্রতীক বলে মনে করে। পঞ্চভুজ থেকে পঞ্চমুখী তারকার উৎপত্তি হয়। এটি ছিল স্বাস্থ্যের প্রতীক। তা ছাড়া **পঞ্চমুখী তারকা** তারা—'ব্যাজ' হিসাবে ব্যবহার করত, আর এই ব্যাজ দেখেই এই সম্প্রদায়ের সভ্যদের চেনা যেত। পঞ্চমুখী তারকার চিত্র নিম্নরূপ ঃ

এই বিশেষ চিত্রটি নিয়ে ছোট্ট একটি কাহিনী আছে। একবার এই সম্প্রদায়ের এক সদস্য বিদেশে কোন পান্থশালায় মারা যায়। মরার আগে সে পান্থশালার মালিককে একটি কাঠে এই প্রতীকটি খোদাই করে তার কবরের উপর প্রোথিত করে রাখতে বলে। বেশ কিছুদিন পর ওই সম্প্রদায়ের এক সদস্য ওই পথে যাবার সময় প্রতীকটি দেখে মালিককে ব্যাপারটি জিজ্ঞাসা করে। সব বিবরণ শুনে সে জানতে পারে তারই সম্প্রদায়ের এক সদস্য এখানে চিকিৎসা সত্ত্বেও মারা যায়, কিন্তু সে মালিকের ঋণ শোধ করে যেতে পারেনি। তখন এই পীথাগোরীয় সদস্য মালিকের সব পাওনা মিটিয়ে দিয়ে চলে যায়। এমনি ছিল ভ্রাতৃসঙ্ঘের নিয়মবিধি ও পরস্পরের প্রতি পরস্পরের আচরণ।



চিত্র—৭

পীথাগোরাস ও ভারতীয় দর্শন

ইতিপূর্বে পীথাগোরাসের ভারত আগমন সম্পর্কে আমরা স্বামী বিবেকানন্দের উক্তি উদ্ধৃত করেছি। শুধুমাত্র আমাদের দেশের প্রখ্যাত দার্শনিকরাই নন,

পাশ্চাত্য দার্শনিকরাও অনেকে এ মত পোষণ করেন। আনুমানিক 500 খ্রীস্ট-পূর্বাব্দের নিকটবর্তী কোন সময়ে পীথাগোরাস ভারতে এসেছিলেন, এবং এখানে জ্ঞান-বিজ্ঞানের পাঠ গ্রহণ করেন। ভারতীয় যে দর্শনে তিনি সবিশেষ আকৃষ্ট হন, তা নিঃসন্দেহে কপিলের সাংখ্যদর্শন। এই সম্পর্কে Macdonell-এর অতি পরিচিত উক্তিটি উদ্ধৃত করা হলো: "dependence of Pythagoras on Indian philosophy and science certainly seems to have a high degree of probability. The doctrine of metempsychosis in the case of Pythagoras appears without any connexion on explanatory background, and was regarded by the Greeks as of foreign origin. He could not have derived it from Egypt as it was not known to the ancient Egyptians."[৪] এই সম্প্রদায়ের শাকান্নভোজন ও জন্মচক্রে বিশ্বাস কাকতালীয় ঘটনা বলে মনে করার হেতু নেই।

সাংখ্য নামের উৎপত্তি রহস্যাবৃত হলেও **সাংখ্য** শব্দ থেকে **সংখ্যা**-র উৎপত্তি একেবারে উড়িয়ে দেওয়া যায় না। এবং "এই দর্শনে তত্ত্বের সংখ্যা পরিগণনা-দ্বারা তত্ত্বনির্ণয় করা হইয়াছে বলিয়া ইহার নাম সাংখ্য"।[৫] আমাদের মনে হয় সংখ্যাশব্দের সম্যক-জ্ঞান অর্থটি পরে গৃহীত হয়। পীথাগোরাস সাংখ্যদর্শনের সংখ্যা অর্থের বা তাৎপর্যের সঙ্গে গভীরভাবে পরিচিত ছিলেন। তাই তাঁর দর্শন ও বিজ্ঞানের মূলভিত্তি সংখ্যায় নিহিত,—**"Everything is arranged according to Number."**

মহর্ষি কপিল সাংখ্যদর্শনের প্রবর্তক এবং তাঁর লিখিত আদি গ্রন্থটির নাম **তত্ত্বসমাস**। এতে সাংখ্যদর্শনের মর্মার্থ অতি সংক্ষেপে সূত্রাকারে লিখিত আছে। এতে মোট 22টি সূত্র আছে, আর এতে সংখ্যা সম্পর্কিত নানা সমাহার অব্যক্ত হয়ে আছে বলে কোন কোন পণ্ডিত মনে করেন। সূত্রগুলির তাৎপর্য ও ব্যঞ্জনা সপর্কে **Dr. K. R. Chakravorti** তাঁর মূল্যবান *Science Based on Symmetry* গ্রন্থে বলেছেন,—"On going through the 'Sutras' and thinking deep into the significances of those numbers in those 'Sutras' we have come to the conclusion that those 'Sutras' conveyed the actual description of the configuration of the symmetrical nature as 25 square units." ডঃ চক্রবর্তী প্রতিসাম্য স্থাপনে **তত্ত্বসমাস**-এর সূত্রগুলির সংক্ষিপ্ত ব্যাখ্যা করে বিজ্ঞান ও দর্শনে অপূর্ব সমন্বয় সাধন করেছেন। কিন্তু আমাদের মনে হয়, এই সূত্রগুলি ও সাংখ্যদর্শনের অধ্যাত্মবাদ ইত্যাদির ব্যাখ্যার মাধ্যমেও সংখ্যার অতীন্দ্রিয়তার সমন্বয় প্রতিষ্ঠিত করা

৪. History of Sanskrit Literature—Macdonell, Page—422

৫. ভারতীয় ও পাশ্চাত্য দর্শন—সতীশচন্দ্র চট্টোপাধ্যায়, পৃ—125

যায়। কিন্তু সে আলোচনার অবকাশ ও সুযোগ এখানে নেই। কেবল এইটুকু বলা যায়, পীথাগোরাসের সংখ্যার প্রতি অত্যধিক গুরুত্ব আরোপ, সংখ্যার রহস্যময়তা ইত্যাদি তা সবই কপিলের **তত্ত্বসমাস** থেকে গৃহীত,—অন্তত সাদৃশ্য বিস্ময়কর।

এখানে **তত্ত্বসমাস**-এর কয়েকটি সূত্রের উল্লেখ করে তা থেকে বিখ্যাত পীথাগোরীয় ত্রয়ীর উদ্ভব আলোচিত হলো। মহর্ষি কপিলের আদি **22**টি সূত্রের দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ ও পঞ্চমটি এরূপ ঃ

2. 'অষ্টৌ প্রকৃতয়ঃ'—প্রকৃতি **আট** প্রকার।
3. 'ষোড়শকস্তু বিকারঃ'—বিকার **ষোল** প্রকার।
4. 'পুরুষ' —এর অর্থ **এক**।
5. 'ত্রৈগুণ্যম্' —গুণ **তিন** প্রকার (সত্ত্ব, রজঃ, তমঃ)।

উপরের প্রথম তিনটি সূত্রে যে-সংখ্যার উল্লেখ আছে, তা যথাক্রমে **8, 16** ও **1**। সংখ্যাগুলি এভাবে সজ্জিত করা যায় ঃ

$$16+8+1=25$$

বা, $25=16+8+1$

বা, $25=16+(8+1)$

বা, $5^2=4^2+3^2 \quad (c^2=a^2+b^2)$

3, 4 ও **5**—এই সংখ্যাগুলি বিখ্যাত পীথাগোরীয় ত্রয়ী। বলা বাহুল্য,—এই সংখ্যাত্রয় সমকোণী ত্রিভুজের বাহু তিনটি সূচিত করে।

সাংখ্যদর্শনে প্রকৃতিকে তিন প্রকার গুণ **সত্ত্ব, রজঃ**, তমঃ-এর সাম্যাবস্থা বলে বর্ণনা করা হয়েছে। অর্থাৎ $8=2^3$। এইরূপ সাম্যাবস্থায় জগতের সৃষ্টি হয় না। পুরুষের সঙ্গে প্রকৃতির মিলনে সাম্যাবস্থা ব্যাহত হয়, আর তখনই সৃষ্টি হয়। অর্থাৎ $8+1=9=3^2$।

প্রকৃতি-পুরুষের মিলনে সাম্যাবস্থার অবসান হলে সৃষ্টি সম্ভব। তখন প্রকৃতি থেকে জগতের অভিব্যক্তির ক্রমটি পরিলক্ষিত হয় **বুদ্ধি** বা মহৎ, অহংকার, একাদশ **ইন্দ্রিয়** ও **পঞ্চতন্মাত্র**-এর মাধ্যমে। আবার ত্রিগুণের তারতম্য অনুসারে একাদশ ইন্দ্রিয় ও পঞ্চতন্মাত্র-এর উদ্ভব। অর্থাৎ $11+5=16=4^2$। সাংখ্যের **পরিণাম-বাদ**-এ পুরুষ, প্রকৃতি, মহৎ, অহংকার, একাদশ ইন্দ্রিয়, পঞ্চতন্মাত্র ও **পঞ্চমহাভূত** স্বীকৃত। অর্থাৎ $1+1+1+1+11+5+5=25=5^2$। এইভাবেই পীথাগোরীয় উপপাদ্যের উদ্ভব বলে মনে করা যেতে পারে।

তৃতীয় অধ্যায়

দার্শনিক জেনো ও গণিত

(495-435 খ্রীস্টপূর্বাব্দ)

গ্রীক প্রকৃতিতে অখণ্ড সংখ্যা ছাড়া অন্য কোন প্রকার সংখ্যার স্থান ছিল না ; কিন্তু এই অখণ্ড সংখ্যা ও বিচ্ছিন্ন রাশির অনুসন্ধান করতে গিয়ে তারা অমেয় রাশি আবিষ্কার করে ফেলল। পীথাগোরীয়রা অমেয় রাশির কথা গোপন করার প্রয়াস পেয়েছিল, কিন্তু পারেনি। তখন সমস্যা হয়ে দাঁড়াল কিভাবে বিচ্ছিন্ন ও অনবচ্ছিন্ন রাশির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করা যায়।

অখণ্ড সংখ্যা বিচ্ছিন্ন বস্তু সূচিত করে, আবার দুটি বিচ্ছিন্ন রাশির অনুপাত হচ্ছে প্রমেয় রাশি। এই রাশি দুইটি সাধারণ এককে পরিমাপযোগ্য,—প্রত্যেকে যেন বিচ্ছিন্ন এককের সমাহার। প্রকৃতপক্ষে, দৈর্ঘ্য বিচ্ছিন্ন একক নয়,—দৈর্ঘ্য, ক্ষেত্রফল, আয়তন, সময় সবই অনবচ্ছিন্ন,—বিতত। একটি রেখাংশের মূলদ ও অমূলদ একক কোন এককের পরিপ্রেক্ষিতে থাকা সম্ভব, কিন্তু গ্রীকদের এই ধারণা ও দৃষ্টিভঙ্গী ছিল না।

জেনোর পরিচয়

এই বিচ্ছিন্ন ও অনবচ্ছিন্ন (**discrete** ও **continuous**) সমস্যাটি যিনি উজ্জীবিত করে তুললেন, তিনি হচ্ছেন **জেনো** (**Zeno**)। ইনি গণিতজ্ঞ নন, ইলিয়াটিক সম্প্রদায়ভুক্ত দার্শনিক। জেনো 495 খ্রীস্টপূর্বাব্দের নিকটবর্তী কোন সময়ে ইলিয়া নগরে জন্মগ্রহণ করেন। এই নগরীর অবস্থান ছিল দক্ষিণ ইটালীতে। তাঁর গুরু পারমেনাইডিসের মতবাদ প্রচারের উদ্দেশ্যে তিনি কয়েকটি যুক্তির নজির উপস্থাপিত করেন। যুক্তিগুলির মধ্যে এমন কৌশল আছে যে, বহুদিন ধরে ইউরোপীয় দার্শনিকরা এগুলির বিচারে খুবই বিভ্রান্তি বোধ করেন। সাধারণভাবে দর্শনশাস্ত্রে এগুলি ধাঁধা বা হেঁয়ালি নামে খ্যাত। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে এগুলি ধাঁধা বা হেঁয়ালি কিনা এনিয়ে মতভেদ আছে। যাই হোক, গতি সম্বন্ধীয় জেনোর চারটি ধাঁধা আছে। এগুলি দার্শনিক ও গণিতজ্ঞদের মধ্যে বিতর্কের ঝড় তুলেছিল,—উভয় শ্রেণীর বিদ্বৎসমাজ বিভ্রান্তির মধ্যে পড়েছিলেন।

জেনো কর্তৃক উপস্থাপিত ধাঁধার উদ্দেশ্য সম্বন্ধে সঠিকভাবে কিছু বলা যায় না। কেউ কেউ বলেন, পেরিক্লিসের জ্ঞানী সমাবেশে এইসব ধাঁধার অবতারণা করে তিনি জ্ঞানীমহলে প্রতিপত্তি বিস্তার করার প্রয়াস পেয়েছিলেন ; আবার কেউ কেউ বলেন, তাঁর গুরু পারমেনাইডিসের মতবাদ প্রচার করা এবং তা অভ্রান্তরূপে

প্রতিষ্ঠা করার উদ্দেশ্যেই তিনি এগুলির অবতারণা করেন। যাই হোক, এই ধাঁধার বিবরণ ও গাণিতিক বিচার-বিশ্লেষণ করার আগে আমাদের জেনো তথা পারমেনাইডিসের দার্শনিক মতবাদটি সংক্ষেপে জানা দরকার।

দার্শনিক মতবাদ

জেনোর গুরু পারমেনাইডিস ছিলেন অদ্বৈতবাদে বিশ্বাসী। তাঁর মতে বিশুদ্ধ বুদ্ধিসঞ্জাত দার্শনিক তত্ত্ব "এক বা অদ্বিতীয় 'সৎ'-মাত্র। এই সৎ সনাতন বা অপরিণামী। তার কোন বিকার নেই। বিশুদ্ধ বুদ্ধি এই অদ্বিতীয়, অপরিণামী, বিকারহীন, 'সৎ'-মাত্রকেই চরম সত্য বলে স্বীকার করতে বাধ্য। ....নানাত্ব আর পরিবর্তনের এই জগৎ আসলে কল্পনামাত্র—মায়া বা মিথ্যা বা ভ্রম।"[১] জেনো গুরুর মতবাদে একান্ত বিশ্বাসী ছিলেন। তাঁর মতে পরিদৃশ্যমান এই জগৎ মিথ্যা বা মায়া ব্যতিরেকে আর কিছু নয়। এই জগতের দুটি প্রধান লক্ষণ হচ্ছে **নানাত্ব** বা **বস্তু-বৈচিত্র্য**, আর **গতি** বা **পরিবর্তন**। এই লক্ষণ দুটি অলীক ও মিথ্যা প্রতিপন্ন করাই জেনোর উদ্দেশ্য বলে মনে করা যেতে পারে; আর সে-কারণেই তাঁর ধাঁধার অবতারণা। জেনোর দার্শনিক ভাবনার সঙ্গে প্রাচীন ভারতের পতঞ্জলির সাদৃশ্য দেখা যায়।

জেনোর ধাঁধা

(a) দৌড় প্রতিযোগিতায় আকিলিস কচ্ছপকে হারাতে পারবে না

"গ্রীক পুরাণে সবচেয়ে ক্ষিপ্রগামী যোদ্ধা আকিলিস। ধরা যাক, তার সঙ্গে একটা কাছিমের দৌড়-প্রতিযোগিতা হচ্ছে। কাছিমটা মন্থরগতি বলেই প্রতি-যোগিতায় তাকে অনেকখানি এগিয়ে দেওয়া গেল।...অর্থাৎ দৌড় শুরু হবার সময়েই কাছিম ও আকিলিসের মধ্যে বেশ খানিকটা ব্যবধান রইল। চোখে দেখার উপর যদি নির্ভর করি, তা হলে অবশ্যই মানতে হবে—শুরুর এই ব্যবধান সত্ত্বেও অচিরেই আকিলিস কাছিমটাকে ঢের পেছনে ফেলে প্রতিযোগিতার গন্তব্য স্থানে পৌঁছে যাচ্ছেন। কিন্তু জেনো বললেন, বুদ্ধির বিচারে অমনতরো ঘটনা একেবারে অসম্ভব।......কেন না, কাছিমকে পেরিয়ে যেতে হলে আকিলিসের পক্ষে সর্বপ্রথম প্রয়োজন : কাছিম আর তাঁর নিজের মধ্যে যে-ব্যবধান তার অর্ধেকটা অতিক্রম করা। আকিলিস যতক্ষণ সেই অর্ধপথ অতিক্রম করছেন, ততক্ষণ কিন্তু কাছিমটা থেমে নেই; মন্থরগতি হলেও সে অন্তত কিছুটা এগিয়েছে। এই অবস্থায়, আকিলিস ও কাছিমের মধ্যে দূরত্ব বদলে গেল। তখন কিন্তু আকিলিসের সমস্যা হবে, এই নতুন দূরত্ব অতিক্রম করার জন্য আগে তার অর্ধেক অতিক্রম করা। আকিলিস

১. ইলিয়াটিক সম্প্রদায়—দেবীপ্রসাদ চট্টোপাধ্যায়, 4র্থখণ্ড, বিশ্বকোষ, সাক্ষরতা প্রকাশন।

যতক্ষণে এই অর্ধ-দূরত্ব অতিক্রম করছেন ততক্ষণে কিন্তু কাছিমটা সামান্য হলেও আরও একটু এগিয়েছে; উভয়ের মধ্যে দূরত্ব আবার বদলে গেল।...এইভাবে আকিলিস এবং কাছিমের মধ্যে দূরত্ব অবশ্যই ক্রমশ কমে আসছে এবং আকিলিসের পক্ষে বার বার সমস্যা দেখা দিচ্ছে: সর্বপ্রথম ওই কম দূরত্বের অর্ধেকটা অতিক্রম করা। হিসেব করলে দেখা যাবে, উভয়ের মধ্যে ব্যবধান ক্রমশ এইভাবে কমে এলেও তা কখনও নিছক শূন্য হতে পারে না।......অতএব বুদ্ধির বিচারে মানতেই হবে যে, আকিলিস কখনোই কাছিমটাকে পেরিয়ে যেতে পারবে না।"

অ্যারিস্টটল তাঁর ***Physica*** গ্রন্থে জেনোর ধাঁধার সম্ভাব্য ব্যাখ্যা দিয়ে "গতি নাই" এই মত খণ্ডন করেছেন। তিনি বললেন, দেশ ও সময় অনবচ্ছিন্ন। সুতরাং অনবচ্ছিন্ন সময় ও দূরত্ব ধারার মধ্যে গতি নিহিত আছে। তাঁর মতে **"it is possible to cover an infinitely divided space in finite time because of the infinite divisibility of the latter"**.[৩] অ্যারিস্টটলের যুক্তিতে গতি কি তা বোঝার উপায় নেই। তারপর দীর্ঘদিন ধরে বহু গণিতজ্ঞ এর ব্যাখ্যা দেবার প্রয়াস পেয়েছেন। এমন কি, আধুনিক বিজ্ঞানের জনক গ্যালেলিও ভেবেছেন, কিন্তু তিনিও সন্তোষজনক উত্তর দিতে পারেননি। এর প্রধান কারণ সমাজ-উত্তরাধিকারের সীমাবদ্ধতা। বস্তুতপক্ষে, তখনকার মানুষ এমন সমাজ-উত্তরাধিকার লাভ করতে পারেনি যার সাহায্যে তারা এই সমস্যার উত্তর দিতে পারত। এমন কি, প্লেটো-অ্যারিস্টটলের যুগে নিউটন-গাউস জন্মগ্রহণ করলে, তাঁরাও অ্যারিস্টটলের যুক্তি ও ব্যাখ্যার চেয়ে বেশী-কিছু বলতে পারতেন না। এই প্রসঙ্গে **L. Hogben**-এর একটি উক্তি প্রণিধানযোগ্য: **"The most brilliant intellect is a prisoner within its own social inheritance."** আমরা এখন এমন সামাজিক উত্তরাধিকার অর্থাৎ গাণিতিক উত্তরাধিকার লাভ করেছি যার সাহায্যে অতি সহজেই বলা যায় জেনোর ধাঁধার ক্রমিক ব্যবধানগুলি প্রকৃতপক্ষে একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots\cdots$$

এই গুণোত্তর শ্রেণীর পদসংখ্যা অসীম হলেও এর সমষ্টি মাত্র 1। জেনোর যুগে এরূপ ধারণা ছিল যার অংশগুলি অসীম তার সমষ্টিও অসীম; কিন্তু গুণোত্তর শ্রেণীটির অসীম-সংখ্যক অংশের সমষ্টি সসীম! এ যেন আর এক ধাঁধা: সমগ্র তার অংশের চেয়ে বড় নয়![৪]

২. ইলিয়াটিক সম্প্রদায়—দেবীপ্রসাদ চট্টোপাধ্যায়, 4র্থখণ্ড, বিশ্বকোষ, সাক্ষরতা প্রকাশন।

৩. The History of the Calculus—C.B. Boyer, Page—44

৪. এই প্রসঙ্গে লেখকের 'অসীমের রহস্য সন্ধানে' প্রবন্ধ 'জ্ঞান বিচিত্রা', অক্টোবর 1982 দ্রষ্টব্য।

(b) প্রক্ষিপ্ত বা ধাবমান শরের গতি অসম্ভব

প্রক্ষিপ্ত বা ধাবমান তীরের গতি চোখে দেখা যায়,—ইন্দ্রিয় প্রত্যক্ষ। কিন্তু বুদ্ধির বিচারে তা একেবারে অসম্ভব বলে ঘোষণা করলেন জেনো। গতিশীল হতে গেলে তীরকে অবশ্যই কয়েকটি স্থান বা বিন্দুরূপী স্থান অতিক্রম করতে হবে। ধরা যাক, T-মুহূর্তে তীর S-স্থানে ছিল ; পরবর্তী T_1-মুহূর্তে তা S_1—স্থানে গেল। এইভাবে T_2-মুহূর্তে S_2-স্থানে, T_3-মুহূর্তে S_3-স্থানে এই রকম ভাবে চলবে। কিন্তু প্রশ্ন হলো T-মুহূর্তে শরটা কি কেবলমাত্র S-স্থানেই ছিল, না S অতিক্রম করে S_1-স্থানে চলে যাচ্ছিল ? অর্থাৎ প্রশ্নটা "Catch up"-এর। যদি বলা হয়, নিছক S-স্থানে ছিল, তা হলে পর মুহূর্তে তার S_1-স্থান প্রাপ্তি হয় কী করে ? সুতরাং স্বীকার করতে হবে, যে-মুহূর্তে তীর S-স্থানে ছিল, সেই মুহূর্তেই সেটা S-স্থান পরিত্যাগও করেছিল। অর্থাৎ কিনা তা আর S-স্থানে ছিল না। অর্থাৎ এই উক্তি বা ব্যাখ্যায় স্ববিরোধিতা আসছে। কারণ, একই T-মুহূর্তে একই বস্তুর অবস্থিতি-প্রসঙ্গে **'ছিল'** ও **'ছিল না'** সম্ভব নয়। কিন্তু তীরের গতি উড়িয়ে দেওয়া যায় না। জেনো বলছেন, বিচার বা চিন্তার স্ববিরোধিতা এড়িয়ে চলতেই হবে, পরিহার করতেই হবে। তা কি করে সম্ভব ? তা সম্ভব, যদি তীরের গতি উড়িয়ে দেওয়া যায়। সুতরাং গতি বা পরিবর্তন অলীক, মিথ্যা।

(c) স্টেডিয়াম বা গতিশীল সারি

এই ধাঁধাটিও অদ্ভুত ধরনের। এখানে জেনো প্রমাণ করেন যে, **অর্ধ সময় দ্বিগুণ সময়ের সমান।** নীচের চিত্ররূপটির সাহায্যে ব্যাপারটি পরিষ্কার করা যাক।

A * * * *	A * * * *
B * * * *	B * * * *
C * * * *	C * * * *

মনে করা যাক, উপরের চিত্ররূপ **A, B** ও **C** তিন সারি সৈন্য। আরো মনে করা যাক, ক্ষুদ্রতম একক সময়ে **B** বাঁ দিকে এক ঘর সরে গেল, এবং সেই সময়ে **C** ডানদিকে এক ঘর সরে গেল। তাহলে **B**-এর পরিপ্রেক্ষিতে বা সাপেক্ষে **C** দু-ঘর সরেছে (ডান দিকের চিত্র)। সুতরাং ক্ষুদ্রতর একক সময়ে **C, B**-এর এক ঘর ডান দিকে থাকবে অর্থাৎ **অর্ধ-একক সময় একক সময়ের সমান !**

এই ধাঁধায় জেনো খুব সম্ভব **আপেক্ষিক গতি-র** কথা বলে থাকবেন। কিন্তু জেনোর ধাঁধায় তার স্পষ্ট উল্লেখ নেই। আর মহামতি অ্যারিস্টটল যেভাবে এই ধাঁধার খণ্ডন করেছেন সেখানেও সুস্পষ্ট কিছু পাওয়া যায় না।

জেনোর ধাঁধার নানা ধরনের ব্যাখ্যা দেবার প্রয়াস রয়েছে। কিন্তু গণিতজ্ঞদের

অধিকাংশই সে-সব ব্যাখ্যা গ্রহণ করতে রাজী নন। আবার যাঁরা এই ধাঁধা ও ব্যাখ্যায় অপারগ হন, তাঁরা জেনোকে বিদ্রূপ করতেও ছাড়েন না। এমন একটি উক্তি হচ্ছে ঃ "**Zeno had his tongue in cheek when he made his** puzzles."

বস্তুত, জেনোর সময় দেশ ও কাল সম্পর্কে দুটি পরস্পর বিরোধী অভিমত প্রচলিত ছিল। এক দলের মত ছিল ঃ দেশ ও কাল অনির্দিষ্টভাবে বিভাজ্য অর্থাৎ গতি সমপ্রকৃতির ; আর অপর দলের মত ছিল ঃ দেশ ও কাল অবিভাজ্য ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র পর্যায়ে গঠিত অর্থাৎ গতি হচ্ছে অতি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র ধাক্কা (jerk)। জেনো তাঁর ধাঁধায় উভয় দলকেই আক্রমণ করেছিলেন বলে অনেকে মনে করেন। তবে আমাদের মনে হয়, জেনোর ধাঁধা কোন মত বা বাদের বিরুদ্ধে নয় ; তিনি সম্ভবত বুদ্ধির কৌশল বা খেলাই করেছেন এ-সবের মধ্যে। অন্তত প্লুটার্কের একটি উক্তি এরকম সম্ভাব্যতাই প্রমাণ করে ঃ

> **"Also the two-edged tongue of mighty Zeno, who,**
> **Say what one would, could argue it untrue."**[৫]

৫. The Lives of the Noble Grecians and Romans—Plutarch, Page—185

চতুর্থ অধ্যায়

সোফিস্টদের বিদ্যাচর্চা

"As one
Who vers'd in geometric lore, would fain
Measure the circle ; and, though pondering long
And deeply, that beginning which he needs,
Finds not ; e'en such was I, intent to scan,
The novel wonder, and trace out the form,
How to the circle fitted, and therein
How plac'd : but the flight was not for my wing".*

—Dante

যে-কোন প্রতিষ্ঠান বা বিদ্যাপীঠের প্রতিপত্তি, খ্যাতি ও গৌরবের মূলে থাকে তার সুযোগ্য অধ্যক্ষ, নেতা বা পরিচালক। পর পর কোন প্রতিষ্ঠানে বা বিদ্যাপীঠে প্রতিভাশালী মানুষের আবির্ভাব হলে তার যশ ও প্রতিষ্ঠা যেমন বৃদ্ধি পায়, তেমনি ওই প্রতিষ্ঠানকে কেন্দ্র করে একদল যোগ্য উত্তরাধিকারী গড়ে ওঠে। এমনিভাবেই থ্যালেসকে কেন্দ্র করে মিলেটাস, আর পীথাগোরাসকে কেন্দ্র করে ক্রোটন গড়ে উঠেছিল। কিন্তু দুঃখের বিষয়, এ'দের মৃত্যুর পর ওইসব বিদ্যাপীঠের গৌরব খুব বেশীদিন অক্ষুণ্ন থাকেনি। মিলেটাস ও ক্রোটন জ্ঞান-বিজ্ঞানের কেন্দ্ররূপে পরিগণিত না হলেও গ্রীস কিন্তু তার ঐতিহ্য অক্ষুণ্ণ রাখল,—তার মূল ভূখণ্ড এথেন্সে বিদ্যাশিক্ষার কেন্দ্র স্থানান্তরিত হলো।

বিনা কারণে কোন ঘটনা ঘটেনা। এথেন্সের শ্রীবৃদ্ধির পেছনেও কারণ আছে,—আর তা ঐতিহাসিক কারণ। মাইকেলের (Mycale) যুদ্ধের পর আয়োনীয় ও এশীয় গ্রীকরা এথেন্সের নেতৃত্ব স্বীকার করে নেয়, এবং ডেলীয় রাষ্ট্রসংঘের উদ্ভব হয়। এই সংঘের কোষাগার স্থাপিত হলো পুণ্যস্থান ও দেবার্চনার পীঠস্থল **ডেলস** দ্বীপে (Delos), 478-477 খ্রীস্টপূর্বাব্দে। কিন্তু পরে এথেন্স নানা কারণ দেখিয়ে 454 খ্রীস্টপূর্বাব্দে কোষাগার এথেন্সে স্থানান্তরিত করে। ফলে, এথেন্সের রাজনৈতিক ও অর্থনৈতিক শ্রীবৃদ্ধি ঘটতে থাকে।

পেরিক্লিসের সময় গ্রীসের ইতিহাসে স্বর্ণ যুগ। তিনি এথেন্সকে নব সাজে সজ্জিত করে তুললেন,—ধনে-মানে-ঐশ্বর্যে ও সৌন্দর্যে। এথেন্স বিদ্যাশিক্ষার

* উদ্ধৃতিটি প্রদীপকুমার মজুমদারের 'আমাদের দৃষ্টিতে গণিত' গ্রন্থ থেকে নেওয়া হয়েছে।

কেন্দ্ররূপে গড়ে উঠল। এমনভাবে গড়ে উঠল যাতে "**Future ages will wonder us**"[১]। গণতন্ত্রী নগর-রাষ্ট্র এথেন্সের সর্বাঙ্গীন শিক্ষার ভার নিলেন তখনকার শ্রেষ্ঠ জ্ঞানী গুণীরা। এঁরা এলেন মিলেটাস ও ক্রোটন থেকে। এইসব শিক্ষকরা বিনা বেতনে পড়াতেন না,—মাইনে পেতেন। এ-বিষয়ে ইতিপূর্বে আমরা উপক্রমণিকায় উল্লেখ করেছি। এইভাবে এথেন্সে সোফিস্ট বা জ্ঞানীদের বিদ্যাচর্চা শুরু হলো।

সোফিস্টদের জ্ঞান চর্চার কয়েকটি বৈশিষ্ট্য পরিলক্ষিত হয়ঃ এখানে বিমূর্ত চিন্তার বিকাশ ঘটল; যুক্তি-তর্ক দিয়ে সব-কিছুকে বিচার করার রীতি প্রচলিত হলো। মানুষ ও প্রকৃতিকে শাণিত যুক্তির পটভূমিতে স্থাপন করে বিচার-বিশ্লেষণের প্রবণতা দেখা গেল। শুধু তাই নয়, বিশ্বপ্রকৃতির ঘটনাবলীর ব্যাখ্যায় গণিতের প্রয়োগ গণিতের ইতিহাসে সোফিস্টদের মহত্তম অবদান বলে অবশ্যই স্বীকৃত হওয়ার যোগ্য। ঐতিহাসিক বিকাশের দৃষ্টিভঙ্গীতে দেখলে এই বৈশিষ্ট্য তেমন নতুন নয়। আয়োনীয় ও পীথাগোরীয়দের মধ্যেও এ-সব বৈশিষ্ট্য পরিলক্ষিত হয়। কিন্তু সোফিস্টরা পূর্বতন অব্যক্ত বৈশিষ্ট্যকে আরো স্পষ্ট করে তুললেন,—ব্যক্ত করলেন।

তিনটি বিখ্যাত সমস্যা

প্রধানত তিনটি সমস্যাকে কেন্দ্র করেই সোফিস্টদের গাণিতিক অনুসন্ধানঃ যে-কোন বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমান বর্গক্ষেত্র অঙ্কন; প্রদত্ত প্রান্তবিশিষ্ট ঘনকের দ্বিগুণ আয়তনের ঘনক অঙ্কন; যে-কোন কোণের ত্রিখণ্ডীকরণ।

বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমান বর্গক্ষেত্র অঙ্কন

প্রাচীনকাল থেকে প্রচলিত এই সমস্যাটি শুধু গ্রীসেই নয়, ভারতেও প্রচলিত ছিল। কিন্তু গ্রীকদের মত ভারতীয়রা অসম্ভব বলে ত্যাগ করেনি,—স্থূল হলেও একটি পদ্ধতি দেবার প্রয়াস পেয়েছে।* কিন্তু এই সমস্যা সমাধান অসম্ভব কেন? আমরা জানি, কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে, তার ক্ষেত্রফল πr^2; ব্যাসার্ধ যদি 1 একক হয়, তা হলে ক্ষেত্রফল π। বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু a হলে, তার ক্ষেত্রফল a^2। যেহেতু বৃত্ত ও বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হবে, সুতরাং

$$a^2 = \pi$$

$$\text{বা, } a = \sqrt{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

(1) নং থেকে পাওয়া যাচ্ছে, বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু হবে $\sqrt{\pi}$। কিন্তু পাই (π)-এর মান মূলদ নয়, এটি অতুত্তম সংখ্যা (**trancendental number**)।

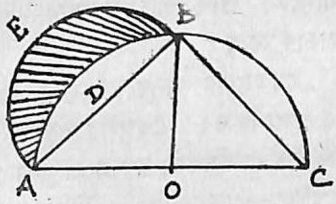
১. Thucydides : History of the Peloponnesian War, Page—120

* এ-বিষয়ে লেখকের 'প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিবৃত্ত' দ্রষ্টব্য।

বস্তুতপক্ষে, π-এর বর্গমূল নির্ণয় অসম্ভব। π-বড়ই রহস্যময়, π বীজগাণিতিক না অত্যুত্তম সংখ্যা, তা এখনো জানা যায়নি।

খ্রীস্টপূর্ব পঞ্চম শতাব্দীতে চিওসের হিপোক্রেটিস (**Hippocrates of Chios**) এই সমস্যা সমাধানের প্রয়াস পেয়েছিলেন, কিন্তু সফল হননি। অনুসন্ধান-গবেষণা থেকে অনেক সময় সম্পূর্ণ নতুন করে কোন-কিছু আবিষ্কার হয়ে পড়ে। হিপোক্রেটিস-এর গবেষণায় বৃত্তের সমান বর্গক্ষেত্র সমস্যার সমাধান না পাওয়া গেলেও অন্য লাভ হয়েছিল ঃ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের সাহায্যে তিনি বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পেরেছিলেন। কিভাবে এই কাজটি তিনি করেছিলেন নীচের চিত্রের সাহায্যে তার বর্ণনা দেওয়া যাক ঃ

চিত্রে O-কেন্দ্র বিশিষ্ট অর্ধবৃত্তের মধ্যে **ABC** একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং **AEB** আর একটি অর্ধবৃত্ত যার ব্যাস **AB**।



চিত্র—৪

এখন,

$$\frac{\textbf{ABC} \text{ অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল}}{\textbf{AEB} \text{ অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল}} = \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{2}{1}$$

অতএব, **OADB**-এর ক্ষেত্রফল **AEB** অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমান। উভয়পক্ষ থেকে **ADB**-এর ক্ষেত্রফল বাদ দিলে চিহ্নিত অর্ধচন্দ্রাকার অংশের ক্ষেত্রফল **AOB** ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান হয়। একেই বর্গীকরণ (**Quadrature**) বলে। এখানে বিশেষভাবে লক্ষ করার বিষয় যে, হিপোক্রেটিস দুইটি বৃত্তের ক্ষেত্রফলের অনুপাত তাদের ব্যাসের বর্গের অনুপাতের সমান,—এই তথ্যটি ব্যবহার করেছেন।

সোফিস্ট সম্প্রদায়ের হিপোক্রেটিসের গণিতজ্ঞ হিসাবে কম খ্যাতি নেই।* তিনি সর্বপ্রথম জ্যামিতির উপপাদ্য শৃঙ্খলাকারে সজ্জিত করেন, এবং **এলিমেণ্টস** নামে জ্যামিতির গ্রন্থ রচনা করেন। কিন্তু তাঁর জ্যামিতি অবলুপ্ত হয়ে গেছে।

ঘনকের দ্বিগুণীকরণ

এই সমস্যার উদ্ভব সম্পর্কে একটি গল্প প্রচলিত আছে। **430** খ্রীস্টপূর্বাব্দে বা তার নিকটবর্তী সময়ে এথেন্সে প্লেগের মড়ক দেখা দেয়। এথেন্সবাসীরা এই মড়ক নিবারণের উপায় জানতে ডেলস-এর অ্যাপোলো মন্দিরে যায়। তখন দৈববাণী হয় যে, এই মন্দিরে যে ঘনকাকৃতি বেদী আছে তার দ্বিগুণ আয়তন

* এ-বিষয়ে বিতর্ক আছে। খুব সম্ভব তিনি পীথাগোরীয়।

বিশিষ্ট ঘনক নির্মাণ করলে মড়ক বন্ধ হবে। এথেন্সবাসীরা এই কাজটি কঠিন মনে করেনি,—তারা ঘনকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা দ্বিগুণ করে একটি ঘনক তৈরী করল। কিন্তু এতে মড়ক থামল না। তারা আবার অ্যাপোলো মন্দিরে গেল দৈববাণীর জন্য। দৈববাণী হলো,—"মূর্খরা, বেদীর আয়তন দ্বিগুণের পরিবর্তে আটগুণ বাড়াইয়াছে, মড়ক কমিবে কিরূপে ?"[২]

ঘনকের মাত্রা দ্বিগুণ করলে সমস্যার সমাধান হবে বলে এথেন্সবাসীরা ভেবেছিল। কিন্তু তা হয়নি, এতে আয়তন দ্বিগুণের পরিবর্তে আটগুণ হয়েছিল। কিন্তু কিভাবে দৈববাণীর নির্দেশ মত বেদী-নির্মাণ সম্ভব ? দৈববাণীর নির্দেশের তাৎপর্য সম্বন্ধে সর্বকালের জ্ঞানী ও মনীষী প্লেটোর মতামত চাওয়া হয়েছিল। তিনি বলেছিলেন, দৈববাণীর দেবতা ঘনকের মাত্রা দ্বিগুণ করতে বলেননি, তিনি চেয়েছেন ঘনকের আয়তন দ্বিগুণ করতে। এই দৈববাণীর মর্মার্থ হচ্ছে গ্রীকরা গণিতের প্রতি বড় উদাসীন,—জ্যামিতির প্রতিও তাদের শ্রদ্ধা-ভক্তির যথেষ্ট অভাব আছে।

সেকালের মানুষ দৈববাণী বিশ্বাস করত, দেব-দ্বিজে তাদের অগাধ বিশ্বাস ও শ্রদ্ধা ছিল। একালের মানুষের ঠিক তেমন শ্রদ্ধা-বিশ্বাস নেই, অন্তত প্রকৃত বিজ্ঞান মানসিকতা সম্পন্ন মানুষের নেই। তাই এখন মানুষ এই সমস্যার অন্য উৎস খোঁজে,—প্রকৃত বাস্তব ও ইতিহাস সম্মত কার্য-কারণ সন্ধান করে। ঐতিহাসিকতার দিক থেকে দেখা যায়, পীথাগোরীয়রা অনুরূপ একটি সমস্যার সমাধান করেছিল। তারা দেখিয়েছিল, কোন বর্গক্ষেত্রের কর্ণ অন্য একটি দ্বিগুণ ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের বাহু হতে পারে। অর্থাৎ প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ বর্গক্ষেত্র-অঙ্কন সমস্যার সমাধান পীথাগোরীয়রা করেছিল। সম্ভবত এই সমস্যা ও তার সমাধান থেকেই ঘনকের দ্বিগুণীকরণ সমস্যার উদ্ভব হয়ে থাকবে।*

এই সমস্যাটি নিয়ে বহু গ্রীক গণিতজ্ঞ মাথা ঘামিয়েছেন। চিওসের হিপোক্রেটিস একটি সমাধান দিয়েছিলেন। তাঁর সমাধান **দুই মধ্যসমানুপাতিকের সম্পাদ্য** বলা হয়।

মনে করা যাক, দুইটি বাহু দেওয়া আছে, একটি অন্যটির দ্বিগুণ। এখন, দুইটি মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় করতে হবে। আধুনিক বীজগণিতের ভাষায় মনে করা যাক x ও y এমন যে,

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$$

তা হলে, $x^2=ay$ এবং $y^2=2ax$

২. বিজ্ঞানের ইতিহাস (প্রথম খণ্ড)—সমরেন্দ্রনাথ সেন, পৃ—155

* বৈদিক যুগে বেদীর আকার ও আয়তন দ্বিগুণ করা সম্পর্কিত সমস্যা আছে। গ্রীকরা পীথাগোরাসের মাধ্যমে প্রাচ্য থেকে এই ধারণা পেয়ে থাকতে পারে। দ্রষ্টব্য : History of Mathematics, vol. II, Smith, Page-298

যেহেতু $y=\frac{x^2}{a}$, সুতরাং দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$$x^3=2a^3$$

x-এর মান নির্ণয় করতে পারলেই সমস্যার সমাধান হয়। $\sqrt[3]{2}$—এর মান নির্ণয় সম্ভব নয়। কারণ, $\sqrt[3]{2}$ অমূলদ। সুতরাং রুলার-কম্পাসের সাহায্যে শর্তাধীন ঘনক অঙ্কন অসম্ভব। গ্রীকদের রুলার-কম্পাস ছাড়া অন্য যন্ত্রপাতি ব্যবহার নিষিদ্ধ ছিল। তবে প্লেটোই এই নিষেধাজ্ঞা জারি করেছিলেন বলে মনে হয়। কারণ,—তাঁর পূর্ববর্তী গণিতজ্ঞরা এই সমস্যা অন্যভাবে সমাধান করার প্রয়াস পেয়েছিলেন, কিন্তু ইউক্লিডের পর রুলার-কম্পাসের ব্যবহার ছাড়া অন্য প্রকার যন্ত্রপাতি ব্যবহারে উৎসাহ দেখা যায় না। ইউরিপিডিস নাকি তাঁর কোন ট্রাজেডীতে এই বিষয়ের উল্লেখ করেছিলেন,—

"Too small hast thou designed the royal tomb.
Double it ; but preserve the cubic form."[৩]

কোণের ত্রিখণ্ডীকরণ

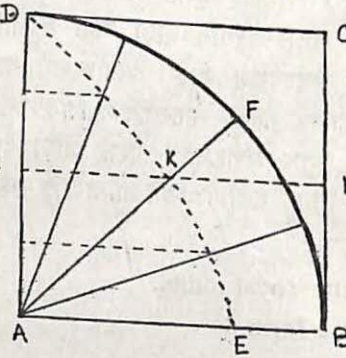
কোণের সমদ্বিখণ্ডন কোন সমস্যা নয়,—যে-কোন কোণকেই সমদ্বিখণ্ডিত করা যায়। কিন্তু যে-কোন কোণকে সমান তিনভাগে ভাগ করা অসম্ভব। অবশ্য 180° বা 90°-কে রুলার-কম্পাসের সাহায্যে খুব সহজে সমান তিন অংশে ভাগ করা যায়। অর্থাৎ 60° বা 30° অঙ্কন রুলার-কম্পাসের সাহায্যে করা যায়। কিন্তু 120°-কে সমান তিনভাগে ভাগ করা যায় না,—রুলার-কম্পাসের সাহায্যে 40° অঙ্কন করা যায় না। কিন্তু বাস্তব ক্ষেত্রে প্রয়োগের জন্য যে-কোন কোণকে মোটামুটিভাবে সমান তিন অংশে ভাগ করা যায়। এই কাজটি অতি সূক্ষ্ম অংশাঙ্কিত চাঁদার সাহায্যে সম্পন্ন করা যায়। কিন্তু রুলার-কম্পাসের সাহায্যে নৈব নৈব চ।

এই সমস্যা সমাধানে প্রাচীনকাল থেকে বহু গ্রীক গণিতজ্ঞ প্রয়াস চালিয়ে গেছেন। প্রথম প্রশংসনীয় প্রয়াস হিপিয়াসের (Hippias)। তিনি ছিলেন সক্রেটিসের সমসাময়িক, এবং **এলিস**-এর (Elis) অধিবাসী। সম্ভবত 460 খ্রীস্টপূর্বাব্দে পেলোপোনেসিয়ার এলিসে জন্মগ্রহণ করেন।

হিপিয়াস যে কোণ-ত্রিখণ্ডীকরণে সফল হয়েছিলেন, তা বলা যায় না। কিন্তু এই গবেষণায় তিনি একটি রেখা,—বক্ররেখা (curve) আবিষ্কার করেন। এর নাম **কোয়াড্রেট্রিকস** (Quadratrix)। এরূপ নামের কারণ বৃত্তের বর্গীকরণে এই বক্ররেখা ব্যবহৃত হয়েছিল। কিভাবে এই রেখা উৎপন্ন হয় তার বর্ণনা দেওয়া যাক ঃ

৩. History of Mathematics (Vol-II)—D. E. Smith, Page-298

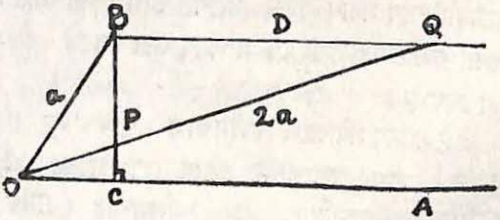
চিত্র—9-এ ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। A-কে কেন্দ্র করে $\overline{AB}$ রেখাংশের তুল্য একটি রেখাংশকে $\overline{AB}$ অবস্থান থেকে $\overline{AD}$ অবস্থানে আবর্তিত করা হলো। $\overline{AB}$ রেখাংশের তুল্য আর একটি রেখাংশকে উল্লম্বভাবে উপরের দিকে $\overline{AB}$-র সঙ্গে সমান্তরাল করে গড়িয়ে (slide) দেওয়া হলো। প্রথমটির গতি কৌণিক, আর দ্বিতীয়টির রৈখিক। প্রথমটি যখন $\overline{AD}$-র সহিত মিলিত হয়, তখন দ্বিতীয় $\overline{DC}$-র সহিত মিলিত হয়। ফলত, উভয়ের যুগপৎ সঞ্চরণের প্রতি মুহূর্তে উভয়ের ছেদবিন্দু পাওয়া যায়। এই ছেদবিন্দুগুলির সঞ্চারপথই কোয়াড্রেট্রিকস অঙ্কন করে। চিত্র—9-এ ডট-চিহ্ন (DE)দিয়ে দেখানো হয়েছে।



চিত্র—9

উদাহরণস্বরূপ, আবর্তিত রেখাংশটি যখন $\overline{AF}$ অবস্থানে আসে, তখন যদি $m\angle BAF = 45°$ হয়, তা হলে অপর রেখাংশটি $\overline{GH}$ অবস্থানে আসবে ($G = \overline{AD}$-এর মধ্যবিন্দু)। অতএব, K কোয়াড্রেট্রিকস-এর একটি বিন্দু। বলাবাহুল্য, অতি সহজেই কোয়াড্রেটিকস-এর অন্যান্য বিন্দুগুলি অঙ্কন করা যায়।

'কোয়াড্রেট্রিকস' নামে বক্ররেখা কিভাবে অঙ্কন করা যায়, তা নিয়ে দু-একটি কথা বলেছি বটে, কিন্তু এর সাহায্যে কোণের ত্রিখণ্ডন সমস্যা সমাধান আলোচিত হলো না। কিন্তু আর্কিমিডিস, নিকোমেডিস (Nicomedes) প্রমুখ এই সমস্যা সমাধানে প্রয়াসী হয়েছিলেন। আমরা জানি, রুলার-কম্পাসের সাহায্যে যে-কোন কোণের ত্রিখণ্ডন সম্ভব নয়। এ-বিষয়ে 1837 খ্রীস্টাব্দে ওয়ান্জেল (P. L. Wantzel) প্রমাণ দেখিয়েছেন, এবং তার বীজগাণিতিক প্রমাণও আছে। পরে আমরা এটি দেখাব। কিন্তু তার আগে নিকোমেডিস-এর প্রয়াসটুকু লক্ষ করা যাক।



চিত্র—10

ধরা যাক চিত্র—10-এর AOB কোণকে ত্রিখণ্ডিত করতে হবে। মনে করি, $OB = a$, এবং BC ও BD যথাক্রমে OA-এর ওপর লম্ব ও সমান্তরাল। OPQ এমনভাবে টানা হলো যাতে $PQ = 2OB = 2a$ হয়। তা হলে, $m\angle AOQ = \frac{1}{3} m\angle AOB$

এখানে **PQ**=**2a** দৈর্ঘ্য রুলারের ওপর চিহ্নিত করা হয়। তারপর **BC**-এর ওপর **P** এবং **BD**-এর ওপর **Q** স্থাপন করা হয় যতক্ষণ না রুলার **O**-বিন্দুর মধ্য দিয়ে যায়। বলা বাহুল্য, এটি স্থূল পদ্ধতি।*

অসম্ভব কেন?

গণিতে কেবল সমস্যার সমাধান করাই হয় না, কোন সমস্যা কি কারণে সমাধান করা যাচ্ছে না তার অনুসন্ধানও করা হয়। গাণিতিক গবেষণার এই দিকটির প্রতি নজর দেওয়ার সময় আসে এক ধরনের বীজগাণিতিক সমীকরণ সমাধানকে কেন্দ্র করে। বস্তুত ইটালীয় গণিতজ্ঞ রুফিনি (**Ruffini**) ও নরওয়ের গণিতজ্ঞ অ্যাবেল (**Abel**) এই নব অধ্যায় সূচনা করেন। রুলার-কম্পাসের সাহায্যে কোণের ত্রিখণ্ডীকরণ করতে গেলে—সাধারণভাবে অঙ্কন করতে গেলে কয়েকটি শর্ত মেনে চলতে হয়। সহজ ও সরলতম ভাষায় শর্তগুলি নিম্নরূপ ঃ

রুলার-কম্পাসের সাহায্যে একটি রাশি বা দৈর্ঘ্য অঙ্কন করা যেতে পারে যদি এবং কেবল যদি এই রাশি বা দৈর্ঘ্য প্রদত্ত তথ্য (**data**) অর্থাৎ দৈর্ঘ্য থেকে নির্দিষ্ট সংখ্যক মূলদ প্রকরণ (**operation**) এবং বর্গমূল নির্ণয়ের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

আমরা জানি, কার্তেজীয় সমতলে যে-কোন সরলরেখা একঘাত সমীকরণের লেখ দ্বারা সূচিত হয়, আর বৃত্তের ক্ষেত্রে দ্বিঘাত সমীকরণের লেখ দ্বারা। কেবল রুলার-কম্পাসের দ্বারা অঙ্কনের শর্ত থেকে জানা যাচ্ছে মাত্র পাঁচটি প্রকরণ বা প্রক্রিয়া কার্যকর—যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগ ও বর্গমূল নির্ণয়। যে-কোন রেখাংশ **n**-এর ক্ষেত্রে এগুলি প্রযোজ্য, কিন্তু রুলার-কম্পাসের সাহায্যে ঘনমূল নির্ণয় অসম্ভব। বৈশ্লেষিক জ্যামিতি ও বীজগণিতের সংখ্যা-ক্ষেত্র (**number field**) থেকে প্রতিষ্ঠিত হয়েছে যে, **X** ও **Y** অক্ষের সমতলে অঙ্কনযোগ্য বিন্দু সেইগুলি যে-সবের বিশেষ ধরনের বাস্তব বীজ (**real roots**) আছে।

1837 খ্রীস্টাব্দে একটি গণিত পত্রিকার সর্বপ্রথম **P. L. Wantzel** কোণের ত্রিখণ্ডীকরণের অসম্ভাব্যতা প্রমাণ করেন। তাঁর প্রমাণটি এখানে আলোচিত না হলেও সে সম্পর্কে দু-একটি কথা বলা যেতে পারে।

চিত্র-**11**-এর কার্তেজীয় সমতলে 60° কোণের শীর্ষবিন্দুটির কথা বিবেচনা করা যাক। এই শীর্ষবিন্দুটি **X** ও **Y** অক্ষদ্বয়ের মূল বিন্দুতে অবস্থিত। **O**-কে কেন্দ্র করে একক ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হলো। চিত্রে 60° কোণের ত্রিখণ্ড-কারী রেখাটি **OP** ; এই রেখাটি বৃত্তটিকে **P** বিন্দুতে ছেদ করেছে। এখন যদি

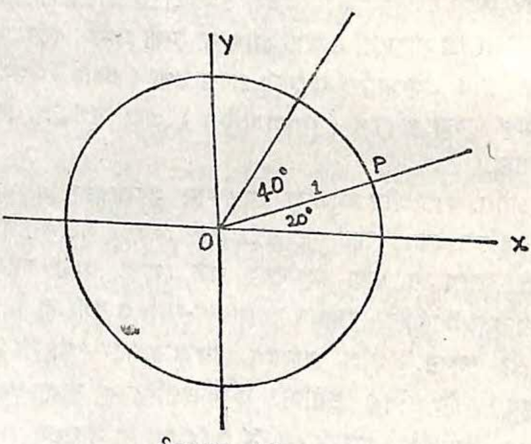
* আর্কিমিডিস ও নিকোমিডিস-এর সমাধান কঙ্কয়েড-এর (*Conchoid of Nicomedes*) সাহায্য করা যেতে পারে। The Historical Roots of Elementary Mathematics, Page—105-106 দ্রষ্টব্য।

কেবল রুলার-কম্পাসের সাহায্যে P বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যায়, তাহলে যে-কোন কোণের ত্রিখণ্ডন সম্ভব। কিন্তু তা সম্ভব নয়। সুতরাং একটি কোণ 60°-এর ক্ষেত্রে সম্ভব হচ্ছে না বলে সাধারভাবে কোণের ত্রিখণ্ডীকরণের সাধারণ পদ্ধতি নেই। যে-বিশেষ কোণের জ্যামিতিক রূপ নিয়ে আলোচনা করা হলো, তার একটি বীজগাণিতিক রূপ দেওয়া যেতে পারে।

মনে করা যাক, θ একটি কোন এবং $\cos\theta = p$; ত্রিখণ্ডিত করার অর্থ হচ্ছে এমন একটি অজ্ঞাত রাশি x নির্ণয় করা যাতে $x = \cos(\theta/3)$; $\theta/3$-এর Cosine-এর সঙ্গে $\cos\theta$-র সম্পর্ক নিম্নরূপ ঃ

$$\cos\theta = p = 4\cos^3(\theta/3) - 3\cos(\theta/3)$$

$\cos\theta = p$-এর θ কোণের ত্রিখণ্ডীকরণ করার অর্থ বস্তুতপক্ষে নিম্নরূপ ত্রিমাত্রিক সমীকরণ সমাধান করা ঃ



চিত্র নং—11

$$4y^3 - 3y - p = O \ldots\ldots(1)$$

কিন্তু সাধারণভাবে এই সমাধান অসম্ভব, এবং তা দেখানোর জন্য ধরা যাক $\theta = 60°$, তাহলে,

$$\cos 60° = \tfrac{1}{2} = p$$

(1) নং সমীকরণটি তা হলে নিম্নরূপে পাওয়া যায় ঃ

$$8y^3 - 6y = 1 \ldots\ldots(2)$$

কিন্তু (2) নং সমীকরণের কোন মূলদ বীজ (rational roots) নেই। ধরা যাক,

$x = 2y$, তাহলে (2) নং সমীকরণ নিম্নরূপে পাওয়া যায় ঃ

$$x^3 - 3x = 1 \ldots\ldots(3)$$

এখন, যদি (3) নং সমীকরণের $x=r/s$ এই মূলদ বীজ থাকে এবং সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে এবং যেখানে r ও s অখণ্ড সংখ্যা এবং যার 1-এর চেয়ে বড় উৎপাদক নেই, তাহলে,—

$$r^3-3s^2r=s^3$$

$$\text{বা, } s^3=r(r^2-3s^2)\ldots\ldots(4)$$

(4) নং থেকে দেখা যাচ্ছে, ডানপক্ষটি r দ্বারা বিভাজ্য এবং তার অর্থ $r=\pm 1$ না হলে r ও s-এর সাধারণ উৎপাদক আছে। ঠিক এমনি ভাবে s^2 হবে $r^3=s^2(s+3r)$-এর একটি গুণিতক যার অর্থ $s=\pm 1$ না হলে r ও s-এর সাধারণ উৎপাদক থাকবে। কিন্তু আমরা অনুমান করেছি r ও s-এর সাধারণ গুণিতক নেই এবং আমরা দেখলাম যে, (3) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করতে পারে এমন সম্ভাব্য সংখ্যা $+1$ ও -1।

এখন, (3) নং সমীকরণে x-এর স্থলে $+1$ এবং -1 বসিয়ে দেখা যায় যে, এর কোন মানই সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

ওপরের এই গাণিতিক যুক্তি অবলম্বনে এরূপ মন্তব্য করা যায় যে, (2) ও (3) নং সমীকরণের কোন মূলদ বীজ নেই। সুতরাং যে-কোন কোণের ত্রিখণ্ডীকরণ অসম্ভব।*

হিপোক্রেটিস ও হিপিয়াসের পর সোফিস্টদের মধ্যে অ্যান্টিফন (**Antiphon**) ও ব্রাইসনের (**Bryson**) নাম বিশেষ উল্লেখযোগ্য। অ্যান্টিফন বৃত্তের বর্গীকরণ সমস্যাটি নিয়ে বিশেষরূপে গবেষণা করেন। বৃত্তের মধ্যে সুষম বহুভুজ অঙ্কন করে তিনি ক্রমাগত এর বাহু বৃদ্ধি করতে থাকেন দ্বিগুণিত করে যতক্ষণ না এই বহুভুজ বৃত্তের সঙ্গে মিশে যায়। তিনি বহুভুজের সমান বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করতে সমর্থ হন। সেইজন্য এরূপ মনে করা হয়, তিনি বর্গক্ষেত্রের সমান বৃত্ত অঙ্কন করতেও সমর্থ হয়েছিলেন। বৃত্ত সম্পর্কে তাঁর ধারণা ছিল যে, বৃত্ত অসংখ্য বাহু-বিশিষ্ট বহুভুজ ব্যতিরেকে আর কিছু নয়। তাঁর এই ধারণা প্লেটোর অ্যাকাডেমীর এক প্রতিভাবান ছাত্র ইউডকসাস নিঃশেষীকরণ তত্ত্বে (**Method of exhaustion**) কাজে লাগিয়েছিলেন।

ব্রাইসন নাকি পীথাগোরাসের সাক্ষাৎ ছাত্র ছিলেন। নিঃশেষীকরণ তত্ত্বে তাঁর অবদান আছে—বিশেষ করে তাঁর ধারণায় **Integral Calculus**-এর ধারণা নিহিত ছিল। কিন্তু এ-সম্পর্কে নিশ্চিত করে কিছু বলা যায় না। তবে ব্রাইসনের ধারণার নানা ব্যাখ্যা থেকে এমনও বলা হয় যে, তাঁর ধারণায় **ডেডিকিণ্ড কাট** (**Dedikind Cut**) বা ক্যাণ্টরের সন্ততির (**continuum**) বীজ নিহিত ছিল। ব্রাইসনের বড় কৃতিত্ব এই যে, তিনি ইউডকসাসের মত গণিতজ্ঞের পূর্বসূরী। এ-

---

*প্রবন্ধটি 'জ্ঞান ও বিজ্ঞান', 1984 জুলাই-আগস্ট সংখ্যায় প্রকাশিত।

বিষয়ে **C. B. Boyer**-এর উক্তিটি স্মরণযোগ্য : the idea which he suggested was developed by Eudoxus into a rigorous type of argument for dealing with problems involving two dissimilar, heterogeneous, or incommensurable quantities, in which intuition fails to represent clearly the transition from one to the other which is necessary to make a comparison possible."[৪]

479 খ্রীষ্টপূর্বাব্দে মাইকেলের (Mycale) যুদ্ধে পারসিকদের সম্পূর্ণ পরাজয়ের পর থেকেই এথেন্সের শ্রীবৃদ্ধি। পেরিক্লিস আয়োনীয়, পীথাগোরীয় পণ্ডিতদের আনিয়ে এথেন্সকে বিদ্যাশিক্ষার কেন্দ্ররূপে গড়ে তুললেন। শুধু জ্যামিতি, জ্যোতির্বিদ্যা ও দর্শনের শিক্ষকরাই নয়, এলেন ব্যাকরণ, ছন্দ, তর্কশাস্ত্র, বাগ্মিতা ও নীতিবিদ্যার শিক্ষকরাও। এইভাবে ক্রমশ এথেন্স বিশ্ববন্দিত প্লেটো ও অ্যারিস্টটলের আবির্ভাবের জন্য প্রস্তুত হলো।

৪, History of the Calculus—**C. B. Boyer**, Page—33

পঞ্চম অধ্যায়

প্লেটো ও তাঁর অ্যাকাডেমী

"Mathematics is the gate and key of the Science."

Roger Backon

একদিকে সোফিস্টদের প্রভাব-প্রতিপত্তি ক্রমাবনতি হতে থাকল, আর অপর-দিকে গণিতচর্চার প্রধান কেন্দ্ররূপে গড়ে উঠতে থাকল অ্যাকাডেমী। পেলোপোনেসীয় যুদ্ধের সময় জ্যামিতির অগ্রগতি ব্যাহত হয়েছিল। যুদ্ধের পর এথেন্সের



প্লেটো

রাজনৈতিক প্রভাব হ্রাস পেল, কিন্তু জ্ঞান-বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় যে অগ্রগতি ও উন্নতি হলো তা সত্যই বিস্ময়কর। এই অগ্রগতি প্রধানত প্রথম দিকে অ্যাকাডেমীকে কেন্দ্র করে, তারপর লাইসিয়ামকে কেন্দ্র করে দুই মহাপ্রতিভাধর

দার্শনিক প্লেটো-অ্যারিস্টটল সম্পন্ন করলেন, তাঁরা জ্ঞান-বিজ্ঞানের নানা শাখায় নব নব দিগন্ত উন্মোচন করে চললেন। বস্তুতপক্ষে, গ্রীসের গৌরবময় যুগে গণিতের পঠন-পাঠন, অধ্যয়ন ও উন্নয়নে দার্শনিকদের মুখ্য ভূমিকা ছিল।

প্লেটো ও অ্যারিস্টটল প্রকৃতপক্ষে গণিতজ্ঞ ছিলেন না। কিন্তু গণিতে তাঁদের অনুরাগ, গাণিতিক গবেষণায় প্রেরণা সঞ্চার, সর্বোপরি গণিত সম্পর্কে তাঁদের প্রত্যয়-প্রতীতি এমন স্বচ্ছ ছিল যে, তাঁদের শিষ্যদের মধ্যে অনেকে প্রথিতযশা গণিতজ্ঞ হয়ে উঠেছিলেন। বিশেষত এ-বিষয়ে প্লেটোর অ্যাকাডেমীর তুলনা নেই।

সংক্ষিপ্ত জীবনচরিত

(427-347 খ্রীস্টপূর্বাব্দ)

প্লেটো এথেন্স বা ঈজিনা (**Aegina**) নগরে এক অভিজাত পরিবারে জন্মগ্রহণ করেন। তাঁর পিতার নাম অ্যারিস্টন (**Ariston**) ও মাতার নাম পেরিকস্টিয়ন (**Perictione**)। প্লেটোর প্রথম জীবনের নাম ছিল অ্যারিস্টোক্লিস (**Aristocles**)। তাঁর সুস্বাস্থ্যের জন্য পরে নাম হয় প্লেটো।

প্লেটোর ছিল দুই ভাই ও এক বোন। দুই ভায়ের নাম অ্যাডিম্যাণ্টাস (**Adeimantus**) ও গ্লোউকন (**Glaucon**), আর বোনের নাম ছিল পোটোন (**Potone**)। পিতার মৃত্যুর পর তাঁর মা দ্বিতীয়বার বিবাহ করেন। পেরিকস্টিয়নের এই পক্ষের পুত্রের নাম অ্যাণ্টিফন (**Antiphon**)। প্লেটো সৎপিতার বাড়ীতেই লালিতপালিত হয়েছিলেন।

জীবনের প্রথম দিকে তাঁর রাজনৈতিক উচ্চাকাঙ্ক্ষা ছিল। কিন্তু গুরু সক্রেটিসের জীবনের করুণ পরিণতি দেখে তাঁর মনে হয়েছিল যে, প্রকৃত বিবেক-বুদ্ধিসম্পন্ন মানুষের স্থান রাজনীতিতে নেই।

অভিজাত পরিবারে প্লেটোর জন্ম, আর অভিজাত পরিবারেই তিনি লালিত-পালিত হয়েছিলেন। দর্শনে তাঁর প্রথম পাঠ হিরাক্লিটাসপন্থী দার্শনিক ক্রাটিলাসের (**Cratylus**) কাছে। তাঁর কাছেই তিনি শিখেছিলেন ইন্দ্রিয় প্রত্যক্ষের জগৎ সত্য ও নিশ্চিত জ্ঞানের বিষয় হতে পারে না ; সক্রেটিসের কাছে শিখেছিলেন সত্য ও নিশ্চিত জ্ঞান হচ্ছে প্রত্যয়াত্মক জ্ঞান (**Conceptual Knowledge**)।

সক্রেটিসের মৃত্যুর পর তিনি মিশর পরিভ্রমণ করেছিলেন এবং সাইরেনে (**Cyrene**) থিওডোরাসের কাছে গণিতের পাঠ নিয়েছিলেন। কিছুদিন ধরে তিনি দক্ষিণ ইটালী ও সিসিলি পরিভ্রমণও করেন। এই ভ্রমণের সময় টরেনটামের বিখ্যাত গণিতজ্ঞ আর্কিটাসের সংস্পর্শে আসেন। এইভাবে তিনি পীথাগোরীয় দর্শন ও গণিতের সঙ্গে সবিশেষ পরিচিত হয়েছিলেন।

387 খ্রীস্টপূর্বাব্দ নাগাদ এথেন্সে ফিরে এসে তিনি অ্যাকাডেমী স্থাপন

করেন। এবং এখানেই অধ্যয়ন, অধ্যাপনা ও গ্রন্থরচনা করে জীবনের অধিকাংশ সময় অতিবাহিত করেন। শিক্ষক ও রাজনৈতিক পরামর্শদাতারূপে তাঁর সুখ্যাতি সমগ্র গ্রীসে ছড়িয়ে পড়ায় তাঁকে দু-তিন বার সিরাকুজ যেতে হয় এবং দ্বিতীয় ডায়োনিসিয়াসকে (**Dionysius II**) জ্যামিতি ও দর্শনের পাঠ দিতে হয়।

গণিতে গবেষণা, উৎসাহ ও উদ্দীপনা সঞ্চারে অ্যাকাডেমীর অবদান বিস্মৃত হওয়ার নয়। 300 খ্রীস্টপূর্বাব্দের নিকটবর্তী সময়ে গণিত-গবেষণার প্রধানতম ধারা আলেকজান্দ্রিয়ায় প্রবাহিত হতে থাকলেও দর্শন চর্চায় অ্যাকাডেমীর প্রাধান্য বজায় থাকে। প্রায় ন'শ' বছর ধরে অ্যাকাডেমী কাজকর্ম চালিয়ে যায়। জাস্টিনিয়ান 529 খ্রীস্টাব্দে **"pagan and perverse learning"** দেওয়ার অজুহাতে অ্যাকাডেমীর দরজা চিরতরে বন্ধ করে দেন।

গণিত সম্পর্কে ধারণা

কেবল তাঁর সময়ের কেন, প্লেটো সর্বকালের অন্যতম শ্রেষ্ঠ জ্ঞানী ও মনস্বী। বস্তুত তিনি গণিতজ্ঞ ছিলেন না, কিন্তু গণিতে তাঁর অসীম আগ্রহ ও প্রগাঢ় অনুরাগ ছিল। দর্শন-চর্চায় গণিতের গুরুত্ব তিনি উপলব্ধি করতেন, গণিত ছিল ভাব (**idea**) ও ইন্দ্রিয় প্রত্যক্ষ বস্তুর মধ্যে সংযোগ স্বরূপ। বিশ্বপ্রকৃতির ঘটনাবলী বুঝতে ও ব্যাখ্যা করতে গণিতের ক্ষমতা ও অপরিহার্যতা সম্বন্ধে তাঁর সন্দেহ ছিল না। এই সম্পর্কে **Ernst Cassirer**-এর মন্তব্য : **"The mathematical order is at once the condition and the basis of the existence of reality ; it is the numerical determinateness of the universe, that secures its inner self-preservation."**[1] প্লেটোর গণিত-প্রীতির ফলেই অ্যাকাডেমীতে ও অন্যত্র গণিতচর্চা বৃদ্ধি পায়। ইউডকসাস সেই জন্যই তাঁর বিদ্যাপীঠ উঠিয়ে অ্যাকাডেমীতে যোগদান করেন। বস্তুতপক্ষে, খ্রীস্টপূর্ব চতুর্থ শতাব্দীতে সব উল্লেখযোগ্য গবেষণাই হয় তাঁর বন্ধুরা করেছেন, না হয় তাঁর ছাত্ররা করেছেন। গণিতের ইতিহাসে এটা কম গুরুত্বপূর্ণ ঘটনা নয়।

বহুখ্যাত রিপাবলিক গ্রন্থে বুদ্ধিগ্রাহ্য (**intelligible**) নিয়ে আলোচনা প্রসঙ্গে প্লেটো গণিত সম্পর্কে তাঁর অভিমত সুন্দরভাবে ব্যক্ত করেছেন। তিনি বলেন, গণিতে ব্যবহৃত ত্রিভুজের প্রকৃতি ও শ্রেণীবিভাগ, যুগ্ম ও অযুগ্ম সংখ্যা ইত্যাদি এক-প্রকার বুদ্ধিগ্রাহ্য, আর জাতি (**universal**) বা আদর্শ (**archetype**) আর এক ধরনের বুদ্ধিগ্রাহ্য। গণিতের বুধিগ্রাহ্য ইন্দ্রিয়গ্রাহ্য নয়। কারণ, গণিতে ত্রিভুজের যে লক্ষণ দেওয়া আছে, তা ইন্দ্রিয়গ্রাহ্য হতে পারে না। বোঝানোর জন্য ত্রিভুজ আঁকা হলেও তা যথার্থ ত্রিভুজ নয়। ত্রিভুজের লক্ষণ অনুসারে কোন ত্রিভুজই

1. **Substance And Function and Einstein's Theory of Relativity—E. Cassirer, Page—134**

আঁকা যায় না। গণিতের সংখ্যা বুদ্ধি দিয়ে বুঝতে হয়,—ইন্দ্রিয় দিয়ে সংখ্যার স্বরূপ ও প্রকৃতি বোঝা যায় না। প্লেটোর মতে জাতি বা আকার সংখ্যার সঙ্গে অভিন্ন।

প্লেটোর আগে গণিতের কোন কোন অংশ ও প্রত্যয়সমূহ (Concepts) বিমূর্ত হিসাবে পরিগণিত হতো বলা সহজ নয়। তবে তাঁর আগে থেকেই বিমূর্ত চিন্তন শুরু হয়েছে, কিন্তু তেমন সচেতনভাবে হয়নি, আর এই চিন্তাধারায় সুশৃঙ্খলাও দেখা যায় না। কিন্তু প্লেটো বিমূর্ত চিন্তন সম্পর্কে সম্পূর্ণ সচেতন ছিলেন। সেইজন্যই তাঁর পক্ষে এ-সম্পর্কে সুস্পষ্ট অভিমত প্রকাশ করা সম্ভব হয়েছিল। সংখ্যা ও জ্যামিতিক প্রত্যয় সম্পর্কে তাঁর সুস্পষ্ট ব্যক্তব্য ঃ "numbers and geometrical concepts have nothing material in them and are distinct from physical things. The concepts of mathematics are independent of experience and have reality of their own. They are discovered, not invented or fashioned."[২]

পাটীগণিত বলতে গ্রীকরা প্রধানত সংখ্যাতত্ত্ব বুঝত,—এর গণনার দিকটির প্রতি তারা আকৃষ্ট ছিল না। বস্তুত যাতে বিমূর্ত চিন্তন নেই, তার প্রতি গ্রীকদের আগ্রহ ও অনুরাগ দেখা যায় না। রিপাবলিক গ্রন্থে প্লেটো গাণিতিক ধারণা, বিমূর্ততা ও পাটীগণিত সম্পর্কে তাঁর অভিমত ব্যক্ত করে বলেছেন,—"arithmetic has a very great and elevating effect, compelling the soul to reason about abstract number, and rebelling against the introduction of visible or tangible objects into the argument......" এই গ্রন্থেই গণিতজ্ঞদের সম্বন্ধে বলেছেন, গণিতজ্ঞরা দৃশ্যমান বা ইন্দ্রিয় প্রত্যক্ষ বস্তু নিয়ে যুক্তি-তর্ক গড়ে তোলেন সত্য, কিন্তু তাঁরা ওইসব বস্তুর মধ্যেই আবদ্ধ থাকেন না ; ওই সব বস্তুর ভাবনা-সদৃশ্য বিষয়ে চিন্তা করেন, তা দেখেন মনের চোখ দিয়ে। বর্তমানের গণিতের অভাবনীয় উন্নতি ও বিমূর্ত চিন্তনের প্রতি গুরুত্ব আরোপ থেকে মনে হয় "Mat hematics in short is a Greek science, whatever new developments modern analysis has brought or may bring."[৩] আর এই মহাযজ্ঞের অন্যতম প্রধান ঋত্বিক নিঃসন্দেহে প্লেটো। প্লেটোর দার্শনিক ভাবনা নিয়ে এদেশে আলোচনা হয়, কিন্তু তাঁর গাণিতিক ভাবনার বিশ্লেষণ নেই,—বড় পরিতাপের বিষয়।

2, Mathematical Thought From Ancient to Modern Times—M. Kline, Page—43

3. A History of Greek Mathematics (I, v)—T.L. Heath.

জ্যামিতিতে অবদান

প্লেটো পীথাগোরীয়দের দ্বারা বহুল পরিমাণে প্রভাবিত হয়েছিলেন। তাঁর দর্শনের মধ্যে অংশত এই প্রভাব দেখা যায়। পীথাগোরীয়রা বিশ্বের চাবিকাঠি সংখ্যায় নিহিত আছে বলে মনে করত, প্লেটো মনে করতেন জাতি বা আকার সংখ্যার সঙ্গে অভিন্ন (**The forms are numbers**)। তা ছাড়া তিনি মনে করতেন বিশ্বের চাবিকাঠি জ্যামিতিতে নিহিত। ঈশ্বরের কাজ কি? এর উত্তরে তিনি বলতেন, **"He geometrises continually."** তাঁর ধারণা ছিল জ্যামিতি মনকে সঠিক ও সতেজ চিন্তনে উদ্বুদ্ধ ও শিক্ষিত করে। তাঁর অ্যাকাডেমীর তোরণ দ্বারে লেখা ছিল **"No one who is unacquainted with geometry enters here"**—জ্যামিতিতে অজ্ঞ ব্যক্তির প্রবেশ নিষেধ। প্লেটোর পরও তাঁর অ্যাকাডেমীতে এই আদর্শ ও নীতি মেনে চলা হতো। একবার একটি ছাত্র ভর্তি হওয়ার জন্য অ্যাকাডেমীতে এলে তখনকার অধ্যক্ষ জেনোক্রেটিস (**Xenocrates**) বলেছিলেন,—**"Depart, for thou hast not the grip of philosophy."**[4] বর্তমানে অর্থনীতি পড়তে এলে হয়তো গণিতে অপারদর্শী কোন কোন ছাত্র অনুরূপ কথা শোনে, **Depart, for thou hast not the grip of economics.**

প্লেটো মুখ্যত দার্শনিক। তাঁর কাছে গণিত বা জ্যামিতিতে কোন-কিছু আবিষ্কার বা উদ্ভাবন আশা করা যায় না। কিন্তু তিনি জ্যামিতির অনেক সংজ্ঞা সঠিকভাবে নির্ধারণ করেন, আর জ্যামিতিক প্রমাণের একটি পদ্ধতির উন্নতিসাধন করেন। পীথাগোরীয়রা স্বতঃসিদ্ধ ব্যবহার করত, কিন্তু সুস্পষ্ট প্রকাশের রীতি তাদের ছিল না। তারা **'বিন্দু,' 'রেখা,' 'তল'** ইত্যাদি জ্যামিতিক ধারণাগুলি জানত, কিন্তু এ-সবের সংজ্ঞা দেওয়ার প্রবণতা তাদের ছিল না। **বিন্দু**-কে তারা বলত **অবস্থানের** একক (unity in position)। আসলে এটি বিন্দুর সংজ্ঞা নয়, দার্শনিকতা। প্লেটোর মতে এই ধরনের সংজ্ঞা "geometrical fiction." প্লেটো বিন্দু, রেখা প্রভৃতির সংজ্ঞা দিয়েছেন। তিনি বলেন, বিন্দুতে রেখার শুরু, বিন্দু বাস্তবনিরপেক্ষ একটি অদৃশ্য রেখা, রেখা প্রস্থহীন দৈর্ঘ্য। ইউক্লিডের জ্যামিতিতে যে-সব সংজ্ঞা দেখা যায়, তার অধিকাংশই প্লেটো ও তাঁর শিষ্য-প্রশিষ্যদের অবদান। অ্যারিস্টটলের মতে, **"সমান জিনিস থেকে সমান জিনিস বাদ দিলে সমান জিনিস অবশিষ্ট থাকবে"**,—এই স্বতঃসিদ্ধটি প্লেটোর আবিষ্কার।

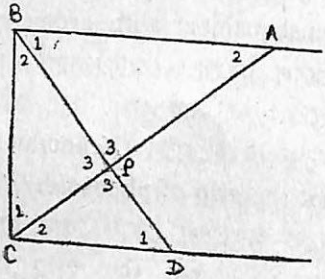
পীথাগোরীয়রা গোলক ও ঘনবস্তু সম্পর্কে যথেষ্ট আগ্রহ দেখিয়েছিল। প্লেটো তাদের তত্ত্বের সম্প্রসারণ ঘটিয়েছিলেন। ঘনবস্তু বিষয়ে গবেষণায় প্রেরণা সঞ্চার প্লেটোর আর একটি অবদান। পীথাগোরীয়রা নানা সুষম ঘনবস্তু বিষয়ে আগ্রহী

---

4. A History of Mathematics—F. Cagori, Page—30

ছিল এবং রহস্য আরোপ করত বটে, কিন্তু প্রিজম, পিরামিড, চোঙ ও শঙ্কু (**cone**) নিয়ে তারা কিছু করেনি। প্লেটো স্বয়ং পাঁচ প্রকার **সমঘন** আবিষ্কার করেছিলেন বলে উল্লেখ করা হয়। এই পাঁচ প্রকার সমঘন **প্লেটোর সমঘন** বলে পরিচিত। প্লেটোর উৎসাহ ও উদ্দীপনার ফলেই অ্যাকাডেমীর এক ছাত্র **মেনেকমাস** (**Menaechmus**) যুগান্তকারী একটি আবিষ্কার করতে সমর্থ হন। তিন ধরনের শঙ্কুকে তল দ্বারা ছেদন করে তিনি **অধিবৃত্ত, পরাবৃত্ত ও উপবৃত্ত** আবিষ্কার করেন।

বিখ্যাত ডেলীয় সমস্যার সমাধান নাকি প্লেটো করেছিলেন। কিন্তু তার সত্যতা সম্পর্কে নিশ্চিত করে কিছু বলা যায় না। কারণ, এই সমস্যার অন্যরূপ সমাধানে প্লেটো নিজেই অসন্তোষ প্রকাশ করেছেন। **আর্কিটাস,** ইউডকসাস মেনেকমাস যে সমাধান করেছিলেন সে-সম্পর্কে তাঁর বক্তব্য যে, এতে জ্যামিতির মহত্ত্ব ক্ষুণ্ণ হয়েছে। আগেই উল্লেখ করা হয়েছে যে, প্লেটো জ্যামিতিতে রুলার-কম্পাস ছাড়া অন্য কোন রকম যন্ত্রপাতি ব্যবহার অনুমোদন করেননি। ডেলীয় অর্থাৎ ঘনকের বর্গীকরণ সমাধানে প্লেটোর সম্ভাব্য পদ্ধতি এরকম বলে মনে করা হয়। কিন্তু তাঁর এই পদ্ধতিতেও রুলার-কম্পাস ব্যবহারের সুযোগ নেই। যাই হোক, তাঁর সম্ভাব্য পদ্ধতিটি বর্ণনা করা হলো ঃ



চিত্র ঃ 12

চিত্রে $\angle ABC = \angle BCD = \angle CPD = \angle APB = \angle BPC = 90°$।

চিত্রে সংখ্যা-চিহ্নিত কোণগুলি পরস্পর সমান। তা হলে—

$\triangle APB$, $\triangle BPC$ ও $\triangle CPD$ সদৃশ।

সদৃশ ত্রিভুজের ধর্ম থেকে লেখা যায়,—

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PB}{PC} = \frac{PC}{PD}$$

$$\left(\frac{PA}{PB}\right)^3 = \frac{PA}{PB} \times \frac{PB}{PC} \times \frac{PC}{PD} = \frac{PA}{PD}$$

$PA = 2\,PD$ এই শর্তে অঙ্কন সম্ভব হলে,

$$\left(\frac{PA}{PB}\right)^3 = 2$$

বা, $PA^3 = 2\,PB^3$

$PA^3 = 2\,PB^3$-এর অর্থ হলো **PA** বাহুর সমান করে অঙ্কিত ঘনকের আয়তন **PB** বাহুর সমান করে অঙ্কিত ঘনকের আয়তনের দ্বিগুণ। কিন্তু রুলার-

কম্পাসের সাহায্যে এই ঘনক অংকন সম্ভব নয়।[৫]

বিশ্লেষণ পদ্ধতির আবিষ্কার, উন্নতিসাধন ও প্রয়োগ প্লেটো ও তাঁর অ্যাকাডেমীর একটি মহত্তম অবদান বলে গণ্য হওয়ার দাবী রাখে। অবশ্য বর্তমানে যে অর্থে **বিশ্লেষণ** ও **সংশ্লেষণ** (Analysis ও Synthesis) ব্যবহৃত হয়, প্রাচীন গণিতে সে অর্থে ব্যবহৃত হতো না। বিশ্লেষণ পদ্ধতি হচ্ছে যে-প্রমাণ প্রতিষ্ঠিত করতে হবে, তা পূর্ব থেকেই ধারণা করে নিয়ে যুক্তিজাল বিস্তার করে স্বীকৃত সত্যে পৌঁছানো। একমুখী হলে পদ্ধতিটি যথার্থ বলে বিবেচিত হতো না। সিদ্ধান্ত সঠিক ও যথার্থ বলে বিবেচিত হতো যদি বিপরীতক্রমে পূর্ব সিদ্ধান্তে পৌঁছানো সম্ভব হতো। অর্থাৎ বিশ্লেষণ পদ্ধতির বৈশিষ্ট্য ছিল তার উভয়মুখিতায়। গ্রীকরা কেবল বিশ্লেষণ পদ্ধতির পক্ষপাতী ছিল না,—সংশ্লেষণ পদ্ধতির মিশ্রণ ঘটিয়ে সিদ্ধান্তে আসার প্রতিই তাদের আগ্রহ ছিল।

আরোহী ও অবরোহী পদ্ধতি

সমগ্র জ্ঞানের অবরোহ পদ্ধতিতে সংগঠিত করার প্রতি প্লেটো দৃঢ় মত পোষণ করেছেন। বিজ্ঞানের কাজ হচ্ছে বিশ্বপ্রকৃতির গঠন বা কাঠামো আবিষ্কার করা, আর অবরোহ পদ্ধতিতে তার গ্রন্থনা করা। তাঁর অ্যাকাডেমীতে এমন প্রশ্ন উঠেছিল যে, কোন সমস্যার প্রাকল্পিক ধারণা ও জ্ঞাত সত্যের ভিত্তিতে তার সমাধান সম্ভব কিনা। প্রমাণের **আকার**-এর উপর এমন জোর দেওয়া হয় যে, দীর্ঘদিনের প্রচলিত নিয়ম, পদ্ধতি আর গণিতে ব্যবহৃত হলো না। অর্থাৎ আরোহী পদ্ধতির চেয়ে অবরোহীর পদ্ধতির ওপর অত্যধিক গুরুত্ব আরোপ করা হলো। কিন্তু কেন? এই প্রশ্নের সঠিক উত্তর দিতে হলে গ্রীকদের প্রবণতা, দার্শনিক চিন্তনের প্রকৃতি ও সমাজ-কাঠামো সম্বন্ধে অনেক কথা বলতে হয়। কিন্তু এ-সবের বিস্তারিত আলোচনার সুযোগ এখানে নেই, গ্রন্থের শেষের দিকে একটি সংক্ষিপ্ত আলোচনার উদ্যোগ নেওয়া যাবে।

জ্ঞান-বিজ্ঞানে সাধারণত আরোহী পদ্ধতি, পর্যবেক্ষণ ও পরীক্ষার ওপর গুরুত্ব আরোপ করা হয়। বর্তমানে বিজ্ঞান সম্পূর্ণরূপে পর্যবেক্ষণ ও পরীক্ষা নির্ভর। এইভাবে যে-জ্ঞান পাওয়া যায়, প্লেটো তথা গ্রীকদের মতে তা বস্তুর বা ঘটনার যথার্থ জ্ঞান নয়, সম্ভাব্য জ্ঞান। প্লেটোর মতে জ্ঞান অভ্রান্ত ও সর্দবিষয়ক। গ্রীকদের মতে বস্তু বা ঘটনার চরম জ্ঞান লাভ একমাত্র অবরোহী পদ্ধতিতেই সম্ভব। আংশিক বা সম্ভাব্য জ্ঞানার্জন দার্শনিকদের লক্ষ নয়,—তাদের লক্ষ চরম ও পরিপূর্ণের। গ্রীক দার্শনিকদের সত্যানুসন্ধান ছিল গাণিতিক সত্যের অংশবিশেষ; গাণিতিক সত্য ইন্দ্রিয়-প্রত্যক্ষ ও পরম জ্ঞানের সংযোগকারী সেতুস্বরূপ।

গ্রীকদের সমাজ-কাঠামোর মধ্যে দেখা যায় সে-যুগে ব্যবসা-বাণিজ্য, কৃষিকর্ম সব-কিছু চালাতো ক্রীতদাসরা। নাগরিক, শিক্ষিত ও অভিজাতরা বিশুদ্ধ জ্ঞান

৫. বিজ্ঞানের ইতিহাস সমরেন্দ্রনাথ সেন, পৃ—176

চর্চায় মগ্ন থাকত। প্লেটো বলেন, শিক্ষিত ব্যক্তিরা কোন ব্যবসায় নিযুক্ত থাকলে তা অপরাধবলে গণ্য করা উচিত। অ্যারিস্টটল বলেন, আদর্শ রাষ্ট্রে কোন নাগরিকের মেকানিক্যাল আর্ট চর্চা করা উচিত নয়। সুতরাং এ হেন সমাজে যে পরীক্ষা, পর্যবেক্ষণ মর্যাদা পাবে না, তাতে আশ্চর্যের নেই। **Sophia** গ্রীক শব্দটির অর্থ জ্ঞান ও বিমূর্ত চিন্তন হলেও, সে-যুগে এই শব্দটি **টেকনিক্যাল পারদর্শিতা (technical skill)** অর্থে ব্যবহৃত হতো। সুতরাং ক্রীতদাস ও অনাগরিকদের ব্যবহৃত আরোহী পদ্ধতি যে নাগরিক ও অভিজাতরা ব্যবহার করবে না, তাতে আশ্চর্যের কিছু নেই। প্লেটো তাঁর রিপাবলিক গ্রন্থের এই পদ্ধতির ইঙ্গিত দিয়ে বলেছেন,—**"Students of geometry, arithmetic and the kindred sciences assume the odd and the even and the figures and three kinds of angles and the like in their several branches of Science ; these are their hypotheses, which they and everybody are supposed to know, and therefore they do not deign to give any account of them either to themselves or others ; but they begin with them and go on until they arrive at last, and in a consistent manner, at their conclusion."**[৬]

প্লেটো ও তখনকার অধিকাংশ গ্রীক দার্শনিকদের মননশীলতা ও বিমূর্ততার প্রতি আগ্রহ ও আকর্ষণ থাকলেও, অ্যাকাডেমীর দু-একজন প্রতিভাশালী ছাত্র অন্য মনোভাব পোষণ করতেন। এই সম্পর্কে ইউডকসাসের নাম সবিশেষ উল্লেখযোগ্য। প্রতিভাশালী এই গণিতজ্ঞ ও জ্যোতির্বিদ বলবিদ্যার প্রতি যথেষ্ট আগ্রহ দেখিয়েছিলেন। কিন্তু প্লেটো ও তাঁর অনুগামীদের বিরুদ্ধ মনোভাবের জন্য এই শাখার উন্নতি হয়নি, অঙ্কুরেই বিনষ্ট হয়েছে বলা যায়।

তবু প্লেটো দর্শন ও গণিতের ইতিহাসে অনন্য, অসাধারণ। তাঁর প্রতিভা ও মনস্বিতার পরিমাপ সাধারণের পক্ষে অসম্ভব বললেই চলে। আর একজন অনন্য প্রতিভা অ্যারিস্টটল প্লেটোর শিষ্য হয়েও সব বিষয়ে গুরুর সঙ্গে একমত হতে পারেননি। কিন্তু তিনি গুরুর প্রতি যে শ্রদ্ধা জানিয়েছিলেন, তা-ই বোধ হয় প্লেটোর প্রতিভার সম্যক মূল্যায়ন ঃ

"সেই অসাধারণ মানুষ সম্বন্ধে বলছি
দুষ্টের রসনা থেকে নির্গত হ'তে পারে না যে নাম।
যাদের তাঁকে প্রশংসা করার নেই অধিকার—
সেই তিনি, প্রথম যিনি সুস্পষ্ট ভাবে করেন প্রকাশ
কথায় ও কাজে
সেই সুধী, যিনি পুণ্যবান।
হায়, আমাদের কেউ তাঁর সমকক্ষ নয়।"[৭]

---

৬. Republic, Book VI, Sec-510

৭. পাশ্চাত্য দর্শনের ইতিহাস (প্লেটো, অ্যারিস্টটল)—নীরদবরণ চক্রবর্তী, পৃ—63

ষষ্ঠ অধ্যায়

ইউডকসাস

(405-355 খ্রীস্টপূর্বাব্দ)

"He is no longer a slave who can choose his master"
Poincaré.

ক্লাসিক্যাল যুগের সর্বশ্রেষ্ঠ গ্রীক গণিতজ্ঞ হচ্ছেন ইউডকসাস। প্রতিভার দীপ্তিতে আর্কিমিডিসের পরেই তাঁর স্থান। আর্কিমিডিস যেমন তাঁর সময়কালেই কিংবদন্তী হয়ে উঠেছিলেন, সমগ্র গ্রীক ভূখণ্ডে তাঁর খ্যাতি ছড়িয়ে পড়েছিল, তেমনি ইউডকসাসের প্রতিভা সম্বন্ধে সে-যুগের মানুষের কোন সন্দেহ ছিল না। আলেকজান্দ্রিয় যুগের বিখ্যাত জ্যোতির্বিজ্ঞানী ও ভূগোলবিদ **ইরাটোস্থেনিস** (**Eratosthenes**) তাঁকে দেবতুল্য (**godlike**) বলে উল্লেখ করেছেন। প্লেটো নিজ প্রতিভায় অমর হয়ে আছেন। কিন্তু তিনি যদি আর অন্য কিছু নাও করতেন, তাহলে অ্যারিস্টটল ও ইউডকসাসের ন্যায় ছাত্রদের গুরু হিসাবে অমরতা লাভ করতেন বললে বোধ হয় অত্যুক্তি করা হয় না।

ইউডকসাসের জীবনের কয়েক পাতা

এশিয়া মাইনরের উপকূলে **স্নিডাস**-এ (**Cnidus**) 405 খ্রীস্টপূর্বাব্দে তাঁর জন্ম। টরেণ্টামের আর্কিটাসের কাছে তাঁর লেখাপড়া শুরু। ইউডকসাস প্রথম থেকেই উপযুক্ত গুরু নির্বাচন করতে পেরেছিলেন। আর্কিটাস শুধু প্রখ্যাত গণিতজ্ঞই ছিলেন না, প্রশাসক ও সেনাপতি হিসাবেও তাঁর খ্যাতি ছিল। টরেণ্টামে পাঠ শেষ করে ইউডকসাস এথেন্সে প্লেটোর অ্যাকাডেমীতে ভর্তি হন। এখানে মহামতি প্লেটোর কাছে তিনি বেশীদিন পাঠ নেননি,—মাত্র দু-মাস। প্রাচীন গ্রীসে দরিদ্র ও প্রতিভাবান ছাত্রদের লেখাপড়া করার সুযোগ-সুবিধা ছিল কিনা বলা কঠিন। কিন্তু ইউডকসাস ধনী ও অভিজাত পরিবারের সন্তান ছিলেন না বলেই মনে হয়। কারণ, প্লেটোর অ্যাকাডেমীতে থাকার মত সম্বল ও সংস্থান তাঁর ছিল না। তিনি অ্যাকাডেমীর বাইরে থেকে যাতায়াত করতেন।

তিনি কেবল প্লেটোর শিষ্যই ছিলেন না, তাঁর বন্ধু হয়ে গেছলেন। তাঁর সঙ্গে মিশর ভ্রমণে সঙ্গীও হয়েছিলেন। এখানেই তিনি জ্যোতির্বিজ্ঞানের পাঠ গ্রহণ করেন বলে অনুমান করা হয়। কিন্তু প্লেটো সংখ্যা বিষয়ে যে রহস্যাদি গ্রহণ করেছিলেন, ইউডকসাস তা করেননি। প্রকৃত বিজ্ঞান মানসিকতা তাঁর

ছিল। বিজ্ঞানকে বিজ্ঞান হিসাবে গ্রহণ করতে তিনি দ্বিধা করেননি। এখানেই প্লেটোর সঙ্গে তাঁর মানসিকতার বিরাট পার্থক্য।

এথেন্সে পড়াশোনার পাঠ চুকিয়ে উত্তর এশিয়া মাইনরের সিজিকাসে (**Cyzicus**) বিদ্যাপীঠ স্থাপন করেন তিনি। আনুমানিক 368 খ্রীস্টপূর্বাব্দ নাগাদ আবার তিনি ও তাঁর অনুরাগী সঙ্গীরা এথেন্সে অ্যাকাডেমীতে যোগদান করেন। কয়েক বছর পর নিডাস-এ ফিরে যান এবং 355 খ্রীস্টপূর্বাব্দে তাঁর মৃত্যু হয়।

বিজ্ঞানের বিখ্যাত ঐতিহাসিক **G. Sarton** ইউডকসাস সম্পর্কে মন্তব্য করে বলেছেন,—**the greatest mathematician and astronomer of his time ; one of the greatest of all times.**"[১] কথাটি অত্যুক্তি নয়, বরং সম্পূর্ণ সত্য। তিনি কেবল গণিতজ্ঞ ও জ্যোতির্বিজ্ঞানীই ছিলেন না, চিকিৎসক, ভূগোলবিদ্ ও সংসদবিদ হিসাবে তাঁর কম খ্যাতি ছিল না।

তিনি ছিলেন পর্যবেক্ষণমূলক জ্যোতির্বিজ্ঞান চর্চায় পক্ষপাতী ও উৎসাহী। হেলিওপোলিসের নিকটে একটি মানমন্দিরে জ্যোতির্বৈজ্ঞানিক পর্যবেক্ষণে নিযুক্ত ছিলেন। নিডাস-এ একটি মানমন্দিরও প্রতিষ্ঠা করেছিলেন। এই মানমন্দিরেই অগস্ত্য নক্ষত্র সম্বন্ধে তাঁর পর্যবেক্ষণ আছে। গ্রহদের **আপাত-আবর্তন** বিষয়ে তাঁর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা বিশেষ খ্যাতিলাভ করে। তাঁর ব্যাখ্যার ওপরেই হিপারকাস ও ক্লডিয়াস টলেমী তাঁদের ব্রহ্মাণ্ড পরিকল্পনা করেন। বস্তুত তাঁর জ্যোতির্বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিভঙ্গী ছিল শত শত বৎসর অগ্রবর্তী। পর্যবেক্ষণ ও পরীক্ষার প্রতি তাঁর অনুরাগ সম্পর্কে **E. T.** Bell বলেন,—**"If by getting to the sun, he said, he could ascertain its shape, size and nature, he would gladly share the fate of Phaëthon, but in the meantime he would not guess."**[২]

গণিতে অবদান

অবরোহী পদ্ধতির প্রতি গ্রীকদের অনুরাগ আদি পর্ব থেকেই দেখা যায়,—কখনো অব্যক্ত আকারে, কখনো বা ব্যক্ত আকারে। থ্যালেসের পর থেকে গ্রীক গাণিতিক চিন্তাধারায় এর প্রভাব আছে। কিন্তু প্লেটোর অ্যাকাডেমীতেই এই পদ্ধতির প্রতি অধিক গুরুত্ব আরোপ করা হয়। ইউডকসাস ছাত্র ও শিক্ষক জীবনের বেশ কিছুদিন এখানে কাটিয়েছিলেন। সুতরাং তিনি যে এই পদ্ধতির প্রতি বেশী আকৃষ্ট হবেন, এবং এই পদ্ধতির গুরুত্ব উপলব্ধি করবেন, তা বলাই বাহুল্য।

১. Introduction to the History of Science, Vol-I, G. Sarton, Page—117
২. Men of Mathematics—E. T. Bell, Page—26

বস্তুত তাঁর গাণিতিক গবেষণায় সুস্পষ্ট স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক চিন্তাধারা পরিলক্ষিত হয়। অবরোহী পদ্ধতির নিপুণ প্রয়োগ করে তিনি বহু গাণিতিক সিদ্ধান্তও করেন। বিশেষ করে অনুপাত ও সমানুপাত বিষয়ে তাঁর তত্ত্ব ও অনুসিদ্ধান্ত অবরোহী পদ্ধতিতে নৈয়ায়িক যুক্তির চমৎকার দৃষ্টান্ত বলে গণ্য হওয়ার দাবী রাখে। মাত্র কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্যের ভিত্তিতে ইউক্লিড যে বিশাল প্রমাণাদি উপস্থিত করেছিলেন, তার অনেকখানি কৃতিত্ব ইউডকসাসের প্রাপ্য। বিশেষ করে **এলিমেণ্টস**-এর পঞ্চম খণ্ড (**Book V**) তো ইউডকসাসের তত্ত্বের ওপর নির্ভর করেই লেখা।

গণিতে তাঁর অন্যতম শ্রেষ্ঠ অবদান হচ্ছে সমানুপাত সম্পর্কীয় তত্ত্ব। এই তত্ত্বটিকে **মুকুট মণি** (**"Crowning gem"**) বলা হয়। পীথাগোরীয়রা অমেয় রাশি আবিষ্কার করেছিল। তাদের দর্শনের পরিপন্থী হলেও এবং তা অতি সংগোপনে রাখার চেষ্টা করা হলেও **অমেয়রা** গোপন থাকেনি,—আরো অনেক অমেয়রাশি আবিষ্কৃত হতে থাকে। সম্পূর্ণ অনিচ্ছা সত্ত্বেও এই বিষয়টির প্রতি গ্রীকদের নজর দিতে হয়। অখণ্ড সংখ্যা ও অখণ্ড সংখ্যার অনুপাত জ্যামিতিক যুক্তি-তর্কে আবির্ভূত হলো, আর সংখ্যাতত্ত্বেও দেখা গেল ; দৈর্ঘ্য, ক্ষেত্রফল ও আয়তনে প্রমেয়-রাশির প্রয়োগ হলো। সুতরাং এরূপ প্রশ্ন উঠল ঃ অমেয় রাশি কি সংখ্যা ? তারা কি প্রমেয়দের মত জ্যামিতিতে,—দৈর্ঘ্য, ক্ষেত্রফল ইত্যাদিতে ব্যবহৃত হতে পারবে ?

ডল্টনের পরমাণুবাদে পরমাণু ছিল অবিভাজ্য। তাতে রসায়নের অগ্রগতিতে বাধা সৃষ্টি করল। অ্যাভোগাড্রো এগিয়ে এলেন এই সঙ্কট মোচনে তাঁর **প্রকল্প** নিয়ে। **অণু**-র ধারণা প্রবর্তন করলেন তিনি। ঠিক এমনিভাবে না হলেও অ্যাভোগাড্রোর মত ইউডকসাস একটি নতুন **ধারণা**-র অনুপ্রবেশ ঘটালেন ঃ তিনি **মাত্রা** বা **পরিমাণ** (**magnitude**) কথাটির প্রবর্তন করলেন। এই মাত্রা বা পরিমাণ সংখ্যা নয় ; রেখাংশ, কোণ, ক্ষেত্রফল, আয়তন এবং সময় যাদের অনবচ্ছিন্ন পরিবর্তন হয়, তাদের **সত্তা**-রূপে ধরে নিলেন। বস্তুত পরিমাণ বা মাত্রা সংখ্যার বিপরীত—এর কোন সাংখ্যিক মান নেই। পীথাগোরীয়রা সমানুপাতের সংজ্ঞা দিয়েছিল বলে মনে করা হয়। কিন্তু তাদের সংজ্ঞা কেবল প্রমেয় রাশির ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। কিন্তু ইউডকসাস যে সংজ্ঞা দিলেন, তা প্রমেয় ও অমেয় উভয় রাশির ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। তবে তিনি অমূলদ সংখ্যা এড়িয়ে গেলেন। মনে হয়, সে-যুগে এই সংখ্যা বিতর্কিত ও দার্শনিক ভাবনার একান্ত পরিপন্থী ছিল বলেই ইউডকসাস এই কাজটি করলেন। সত্যই সর্বযুগে শ্রেষ্ঠ প্রতিভা এমনি করেই বুঝি সমাজ কাঠামোর কারাগারে বন্দী হয়। যাই হোক, ইউক্লিডের এলিমেণ্টস গ্রন্থ থেকে তাঁর সমানুপাতের সংজ্ঞাটি প্রথমে ইংরেজীতে ও পরে তার যথাসম্ভব অনুবাদ দেওয়া হলো ঃ

Magnitudes are said to be in the same ratio, the first to the second and third to the fourth, when, if any equimultiples whatever be taken of the first and third, and any equimultiples whatever of the second and fourth, the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short of, the later equimultiples taken in corresponding order.[৩]

যখন প্রথম ও তৃতীয় রাশির যে-কোন সমগুণিতক দ্বিতীয় ও চতুর্থ রাশির যে-কোন সমগুণিতকের চেয়ে যথাক্রমে বৃহত্তর, সমান অথবা ক্ষুদ্রতর হয়, তখন প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থ রাশির অনুপাতের সমান হবে এবং মাত্রাগুলিকে সমানুপাতিক বলা হবে।

ওপরের সংজ্ঞাটিকে আধুনিক বীজগণিতের ভাষায় প্রকাশ করা যাক ঃ

a ও **c**-কে যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা **m** এবং **b** ও **d**-কে যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা **n** দ্বারা গুণ করলে

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ হবে,}$$

যখন $ma > nb$ হলে, $mc > nd$ হবে,

$ma = nb$ হলে $mc = nd$ হবে,

এবং

$ma < nb$ হলে, $mc < nd$ হবে।

এইভাবে মাত্রা বা পরিমাণ, অনুপাত ও সমানুপাতের সংজ্ঞা নিরূপণ করেছেন ইউডকসাস, আর অনুপাত ও সমানুপাতের মধ্যে সমতা স্থাপন করেছেন। এই সংজ্ঞায় প্রমেয় ও অমেয় একসূত্রে গ্রথিত হলো, কিন্তু এতে কোন সংখ্যা ব্যবহৃত হলো না। বস্তুত এই সংজ্ঞা দিয়ে ইউডকসাস যে কাজটি সম্পাদন করলেন তাতে জ্যামিতিক সত্তার সঙ্গে পূর্ণসংখ্যার গুণিতক বিজড়িত হলো, কিন্তু সংখ্যা, মূলদ রাশি ও অমূলদ রাশির কোন সাধারণ সংজ্ঞা দেওয়া হলো না। এতে গ্রীক গণিতের সঙ্কট কাটল ঃ গ্রীক জ্যামিতিকাররা অমেয় রাশি সম্পর্কে দৃঢ় যৌক্তিক ভিত্তিভূমি পেলেন, তাঁরা জ্যামিতির প্রভূত উন্নতিসাধন করলেন, জ্যামিতিক গবেষণায় তাঁরা অনেক দূর এগিয়ে গেলেন। কিন্তু সামগ্রিকভাবে গ্রীক গণিতের ভবিষ্যরচনায় তা সুদূরপ্রসারী হলো না। এ-বিষয়ে গ্রন্থের শেষের দিকে আমরা সামান্য আলোচনা করব।

ইউডকসাসের আর একটি মহৎ আবিষ্কার **নিঃশেষীকরণ পদ্ধতি** (Method of exhaustion)। অবশ্য তিনি এই পদ্ধতির উদ্ভাবক কিনা তা নিয়ে মতভেদ

৩. The Thirteen Books of Euclid's Elements, Vol-II,—T. L. Heath, Page—114

আছে। কারণ, তাঁর আগে অ্যালিফন ও ব্রাইসন, এমন কি হিপারকাসের গবেষণায় এই ধরনের পদ্ধতি দেখা যায়। কিন্তু ইউডকসাসের পদ্ধতির মধ্যে অনেক সূক্ষ্মতা ও সুশৃঙ্খলা দেখা যায়। এমন কি সর্বকালের অন্যতম শ্রেষ্ঠ গণিতজ্ঞ আর্কিমিডিস তাঁর গাণিতিক গবেষণায় ইউডকসাসের পদ্ধতি প্রয়োগ করেছিলেন। এই পদ্ধতিতে **সীমা** (limit) ধারণা দেখা না গেলেও এতে **কলন** (Calculus)-এর বীজ নিহিত ছিল বলে মনে করা হয়,—বিশেষত সমাকলনের (Integral Calculus)।

নিঃশেষীকরণ পদ্ধতির সাহায্যে ইউডকসাস বক্ররেখা দ্বারা উৎপন্ন ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করেন। এর সাহায্যে তিনি প্রমাণ করেন দুইটি বৃত্তের ক্ষেত্রফলের অনুপাত ব্যাসার্ধের বর্গের অনুপাতের সমান; দুইটি গোলকের আয়তনের অনুপাত ব্যাসার্ধের ঘনর অনুপাতের সমান; একই ভূমি ও উচ্চতা বিশিষ্ট পিরামিডের আয়তন প্রিজমের আয়তনের এক-তৃতীয়াংশ এবং একই ভূমি ও উচ্চতা বিশিষ্ট শঙ্কুর আয়তন চোঙের আয়তনের এক-তৃতীয়াংশ।

ইউডকসাসের নিঃশেষীকরণ পদ্ধতি যে স্বীকার্য বা স্বতঃসিদ্ধের ওপর প্রতিষ্ঠিত, তার নাম আর্কিমিডিসের স্বতঃসিদ্ধ। কিন্তু বর্তমানে এটি **আর্কিমিডিস-ইউডকসাস স্বতঃসিদ্ধ** নামে পরিচিত। ইউক্লিডের এলিমেন্টস গ্রন্থে যেভাবে এই স্বতঃসিদ্ধটি দেওয়া আছে, তা নিম্নরূপ ঃ

"Two unequal magnitudes being set out, if from the greater there be subtracted a magnitude greater than its half, and from that which is left a magnitude greater than its half, and if this process be repeated continually, then there will be left some magnitude which will be less than the lesser magnitude set out."[৪]

অর্থাৎ প্রদত্ত দুইটি অসম মাত্রা বা পরিমাণের বৃহত্তরটি থেকে তার অর্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর বিয়োগ করলে, অবশিষ্টের অর্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর বিয়োগ করলে, পুনরায় অবশিষ্টের অর্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর বিয়োগ করলে এবং এইভাবে পদ্ধতির ক্রমাগত পুনরাবৃত্তি করলে প্রদত্ত ক্ষুদ্রতর মাত্রা বা পরিমাণের চেয়ে কিছু ক্ষুদ্রতম মাত্রা বা পরিমাণ অবশিষ্ট থাকবে।

এলিমেন্টস-এর দ্বাদশ খণ্ডে ইউক্লিড এই পদ্ধতির প্রয়োগ দেখিয়েছেন। গ্রীকরা অবশ্য **নিঃশেষীকরণ** (exhaust) শব্দটি ব্যবহার করেনি। সপ্তদশ শতাব্দীতে এই শব্দটির অনুপ্রবেশ ঘটে। ইউক্লিডের একটি প্রমাণ উপস্থাপিত করে পদ্ধতিটির সঙ্গে সামান্য পরিচয় করে নেওয়া যাক।

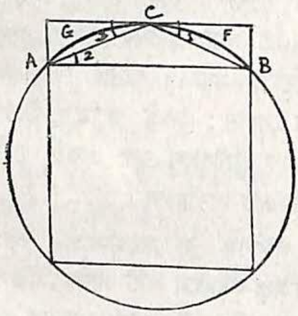
---

৪. Euclid's Elements, Vol-III, T. L. Heath, Page—14

উপপাদ্য ঃ দুইটি বৃত্তের ক্ষেত্রফলের অনুপাত ব্যাসদ্বয়ের বর্গের অনুপাতের সমান।

ইউক্লিড প্রথমত দেখিয়েছেন বহুভুজ অঙ্কনের দ্বারা বৃত্ত নিঃশেষিত হতে পারে ; তারপর প্রমাণ করেছেন এই পদ্ধতির সাহায্যে উপপাদ্যের প্রতিপাদ্য বিষয়।

চিত্রে বৃত্তের মধ্যে একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করা হলো। অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বৃত্তের ক্ষেত্রফলের অর্ধেকের চেয়ে বেশী। কারণ, এই বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পরিলিখিত বর্গক্ষেত্রের অর্ধেকের সমান, আবার পরিলিখিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বৃত্তের ক্ষেত্রফলের অর্ধেকের চেয়ে বেশী।



চিত্র—13

এখন, মনে করা যাক, **AB** অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু। **C** বিন্দুতে **AB** চাপকে সমদ্বিখণ্ডিত করা হলো ; **AC** ও **BC** যোগ করা হলো। **C** বিন্দুতে একটি স্পর্শক অংকন করা হলো, এবং ওই স্পর্শকের ওপর **AD** ও **BE** লম্ব টানা হলো।

এখন, $\angle BCE = \angle BAC$ হওয়ায় $DE \parallel AB$,

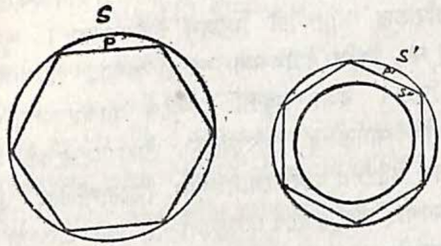
সুতরাং **ABED** একটি আয়তক্ষেত্র, এবং এর ক্ষেত্রফল **ABFCG** বৃত্তাংশের চেয়ে বেশী। আবার, $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ ▭ ABED,

$\therefore \quad \triangle ABC > \frac{1}{2}$ ABFCG বৃত্তাংশ।

এইভাবে বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুতে এই পদ্ধতির পুনরাবৃত্তি করলে আমরা একটি সুষম অষ্টভুজ পাব যা কেবলমাত্র বর্গক্ষেত্রকেই সীমাবদ্ধ করবেনা, বৃত্ত ও বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অন্তরের অর্ধেকের বেশী সীমাবদ্ধ করবে। আবার এই অষ্টভুজের প্রত্যেক বাহুতে পদ্ধতিটির পুনরাবৃত্তি করলে আমরা একটি সুষম ষোড়ভুজ পাব যা অষ্টভুজ এবং বৃত্ত ও অষ্টভুজের ক্ষেত্রফলের অর্ধেকের বেশী সীমাবদ্ধ করবে। এই পদ্ধতিটি যতবার খুশী করা যেতে পারে। আর এইভাবে বৃত্ত নিঃশেষিত হতে পারে।

এখন, মনে করা যাক, S ও S' দুইটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল এবং তাদের ব্যাস যথাক্রমে d ও d'।

ইউক্লিডের প্রামাণ্য বিষয় ঃ $S : S' = d^2 : d'^2$........(1)



চিত্র—14

(1) নং সমতা যথার্থ বা সত্য না হলে, মনে করা যাক, নিম্নের সমতা যথার্থ ঃ

$$S : S'' = d^2 : d'^2 \text{........(2)}$$

এখানে S'', S'-এর চেয়ে বড় অথবা ছোট হতে পারে। মনে করা যাক, $s'' < s'$।

এখন, S' ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বৃত্তে আমরা P' ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বহুভুজ অঙ্কন করতে পারি যাতে $P' > S''$ এবং $P' < S'$ হয়। অর্থাৎ P'-এর ক্ষেত্রফল এমন যে S'-এর সঙ্গে তার তফাৎ বা পার্থক্য ($S' - S''$)-এর চেয়েও কম হয়। তা হলে,—

$$S' > P' > S'' \text{..................(3)}$$

S-এর মধ্যে P' সদৃশ P বহুভুজ অঙ্কন করা হলো। বৃত্তের মধ্যে সদৃশ বহুভুজ অঙ্কিত হলে, তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত ব্যাসের বর্গের অনুপাতের সমান হয়।

সুতরাং $P : P' = d^2 : d'^2$

কিন্তু (2) নং যুক্তি অনুসারে,

$P : P' = S : S''$

বা, $P : S = P' : S''$

কিন্তু $P < S$,

অতএব, $P' < S''$

কিন্তু (3) নং অনুসারে এখানে বিরোধিতা আসছে।

এইভাবে দেখানো যায়, $S'' < S'$ হবে না। তা হলে, $S' = S''$।

অতএব, (1) নং সমতার যাথার্থ নিরূপিত হলো ঃ $S : S' = d^2 : d'^2$।

ইউডকসাসের নিঃশেষীকরণ পদ্ধতি **কলন** (**Calculus**) আবিষ্কারের পথে একটি পদক্ষেপ। কোন কোন গণিতের ঐতিহাসিক এই পদ্ধতি **অন্তর কলন** (**differential calculus**) আবিষ্কারের পদক্ষেপ বলে স্বীকার করতে চান না।

আমরা ওইসব বিতর্কে যেতে চাই না। কিন্তু ইউডকসাস আবিষ্কৃত এই পদ্ধতি যে গ্রীক গণিতে নতুন প্রেরণা সঞ্চার করেছিল, তা অস্বীকার করার উপায় নেই।

বহুমুখী প্রতিভার অধিকারী ছিলেন ইউডকসাস। শুধু গণিত, জ্যামিতি ও জ্যোতির্বিজ্ঞানই নয়, তিনি চিকিৎসা শাস্ত্রে প্রখ্যাত ছিলেন, সংসদবিদ হিসাবে তাঁর খ্যাতিও ছিল। বলা বাহুল্য, সে-যুগে অ্যাকাডেমীর খ্যাতি ছিল। কিন্তু যাঁরা অ্যাকাডেমীর খ্যাতি বৃদ্ধি করেছেন, তাঁরা অনেকেই ইউডকসাসের ছাত্র। স্বনামধন্য ওইসব ছাত্রদের মধ্যে মেনেকমাস, ডিনোস্ট্রাটাস, এথেনাস ও হেলিকস প্রভৃতির নাম অবশ্যই করতে হবে। বস্তুত তিনি এমন একজন গণিতজ্ঞ ও বিজ্ঞানী ছিলেন যাঁর মধ্যে গুপ্ত, গূঢ় ও রহস্য বলে কিছু ছিল না। বিজ্ঞান ও গণিত সম্পর্কে তাঁর এই দৃষ্টিভঙ্গী সর্বশ্রেষ্ঠ অবদান বলে অবশ্যই গণ্য হবে।

সপ্তম অধ্যায়

মহামতি অ্যারিস্টটল

(384-322 খ্রীস্টপূর্বাব্দ)

"Music and poesy used to quicken you ;
The mathematics, and the metaphysics,
Fall to them as you find your stomach serves you.
No profit grows, where is no pleasure ta'en :—
In brief, Sir, study what you most affect."

Shakespeare.

অ্যারিস্টটলের জ্ঞান ও মনীষা বিশ্বকোষের ন্যায়। জ্ঞান-বিজ্ঞানের সব শাখায় অবাধ বিচরণ তাঁর। আর মনস্বিতা দেশ-কালের অতীত। যুগে যুগে মানুষ তাঁর অভিমতকে প্রামাণিক হিসাবে গ্রহণ করে এসেছে, নিজ নিজ বুদ্ধির আলোকে নব নব ব্যাখ্যা-বিশ্লেষণ করার প্রয়াস পেয়েছে। বস্তুত মননশীলতার ইতিহাসে দুটি নাম প্লেটো-অ্যারিস্টটল, গুরু-শিষ্য। গুরুর কাছেই শিষ্যের অব্যক্ত ক্ষমতার মাত্রা ও সম্ভাবনা ধরা পড়ে। প্লেটোর কাছেও অ্যারিস্টটলের সম্ভাবনা ধরা পড়েছিল। তাই তিনি অ্যারিস্টটলকে তাঁর **'অ্যাকাডেমীর মন'** বলতে দ্বিধা করেননি ("The mind of the School")। গীতার একটি কথা মনে পড়ে,— 'ইন্দ্রিয়াণাং মনশ্চাস্মি'।*

অ্যারিস্টটলের জীবনের ঘটনা নিয়ে

384 খ্রীস্টপূর্বাব্দে থ্রেসের স্টাগেরিয়ায় (**Stageira in Thrace**), বর্তমান স্টাভরোতে (**Stavro**) অ্যারিস্টটল জন্মগ্রহণ করেন। তিনি ছিলেন অভিজাত পরিবারের সন্তান। পিতার নাম নিকোম্যাকাস। ইনি ছিলেন সুচিকিৎসক ও ম্যাসিডনের রাজা দ্বিতীয় অ্যামিনটাস-এর সভাসদ। অ্যারিস্টটলের শল্যচিকিৎসায় হাতে খড়ি পিতার কাছে। বিজ্ঞানের প্রতি আগ্রহ ও আকর্ষণ তাঁর রক্তেই ছিল। কারণ,— তাঁর পূর্বপুরুষরা অনেকেই চিকিৎসক ছিলেন।



অ্যারিস্টটল

অতি অল্প বয়সেই তাঁর পিতার মৃত্যু হয়। তখন **প্রকসেনাস** (**Proxenus**) নামে এক আত্মীয় তাঁর অভিভাবক হন। এবং তাঁরই উদ্যোগে

* গীতা—১০।২২

তিনি সতেরো বছর বয়সে প্লেটোর অ্যাকাডেমীতে ভর্তি হন। এখানে দীর্ঘ কুড়ি বছর ধরে পড়াশোনা ও গবেষণা করেন। প্লেটোর মৃত্যুর পর তাঁর ভাইপো **স্পিউসিপাস** (**Speusippus**) অ্যাকাডেমীর অধ্যক্ষ হন। অ্যারিস্টটল যান অ্যাকাডেমী ত্যাগ করে চলে। অবশ্য তাঁর অধ্যক্ষ হওয়ার সুযোগ ছিল না। কারণ, তিনি এথেনীয় ছিলেন না। কেউ কেউ বলেন, অ্যাকাডেমীতে গণিতের প্রতি অত্যধিক গুরুত্ব আরোপ করায় তিনি অ্যাকাডেমী ত্যাগ করেন।

রাজনৈতিক কারণে তাঁকে এথেন্স ত্যাগ করতে হয়। তখন **অ্যাসস** (**Assos**) শহরে তিনি একটি ছোট বিদ্যাপীঠ স্থাপন করেন। এইখানে অবস্থানকালে তিনি অ্যাটারমিনাসের রাজা **হারমিয়াস**-এর ওপর প্রভাব বিস্তার করতে থাকেন এবং তাঁর পালিতা কন্যা **পিথিয়াস**-কে বিবাহ করেন। অ্যাসস-এ অ্যারিস্টটল মাত্র তিন বছর ছিলেন। তারপর তিনি **মিলিটন** আসেন।

'শাপে বর হয়' বলে একটা কথা আছে। এথেন্স ত্যাগ অ্যারিস্টটলের পক্ষে ভালই হয়েছিল। আয়োনীয় দ্বীপপুঞ্জের মুক্ত প্রাকৃতিক পরিবেশে প্রাকৃতিক ঘটনাবলী খুব কাছ থেকে দেখার সুযোগ লাভ করলেন। তাঁর রক্তে তো বিজ্ঞানের প্রতি আকর্ষণ ও আগ্রহ ছিলই। এই পরিবেশে আসার জন্য জীববিদ্যা ও প্রাণি-বিদ্যার ভিত্তি স্থাপন করার পক্ষে তাঁর সুবিধা হয়েছিল।

খ্রীস্টপূর্ব **343-40** পর্যন্ত তিনি আলেকজাণ্ডারের শিক্ষক হিসাবে নিযুক্ত হন। **335** খ্রীস্টপূর্বাব্দে শহর থেকে দূরে কয়েকটি ছোট-ছোট বাগান-বাড়ী ভাড়া নিয়ে অ্যাকাডেমীর অনুকরণে '**লাইসিয়াম**' (**Lycium**) প্রতিষ্ঠা করেন। এখানে পদচারণা করতে করতে তিনি শিক্ষা দিতেন। গ্রীক ভাষায় **walklng up and down**-কে **Peripatetic** বলা হয়। তাই অ্যারিস্টটলের বিদ্যাপীঠের দর্শনের নাম '**পেরিপ্যাটেটিক**'। আলেকজাণ্ডারের মৃত্যুর পর এথেন্সবাসীরা বিদ্রোহ করতে থাকে এবং অ্যারিস্টটল সহ আলেকজাণ্ডারের সব ঘনিষ্ঠ ব্যক্তিদের নানাভাবে পীড়ন করতে থাকে। যাতে এথেন্সবাসীরা **"sin twice against philosophy"** করতে না পারে, সেইজন্য তিনি এথেন্স ত্যাগ করে ক্যালসিস-এ (chalcis—চ্যালসিস ?) চলে যান এবং সেখানে **322** খ্রীস্টপূর্বাব্দে তাঁর মৃত্যু হয়।

অ্যারিস্টটল কোন বিষয়ের উপর লেখেননি বা আলোচনা করেননি, তা বোধ হয় গবেষণা করে বার করতে হয়। পদার্থবিদ্যা, গণিত, আবহাওয়াবিদ্যা, উদ্ভিদবিদ্যা, জীববিদ্যা, মনস্তত্ব, অর্থনীতির ওপর তিনি লিখেছেন ; আবার সাহিত্য, অলঙ্কার, অধিবিদ্যা, নীতিবিদ্যা, শিল্পতত্ত্ব ইত্যাদিও বাদ যায়নি। গণিত সম্পর্কে তিনি পৃথকভাবে কিছু লেখেননি সত্য, কিন্তু তাঁর নানা গ্রন্থে নানা আলোচনা প্রসঙ্গে এই বিষয়ের উল্লেখ আছে। এইসব উল্লেখ থেকে গণিতের স্বরূপ ও প্রকৃতি সম্পর্কে তাঁর ধারণার কথা জানা যায়।

বিজ্ঞান বিষয়ের শ্রেণীবিভাগ

বিজ্ঞানের সব বিষয়কে অ্যারিস্টটল তিনটি শ্রেণীতে ভাগ করেছেন ঃ **তত্ত্বীয়** (**theoretical**), **ফলদায়ক** (**Productive**) ও **ব্যবহারিক** (**Practical**)। তত্ত্বীয় বিষয়গুলি অধিবিদ্যা, পদার্থবিদ্যা ও গণিত। এরা সত্যানুসন্ধান করে। কলাবিদ্যা হচ্ছে ফলদায়ক, আর ব্যবহারিক বিষয়গুলি হচ্ছে রাষ্ট্রনীতি, নীতিবিদ্যা ইত্যাদি। এইসব বিষয় মানুষের কাজকর্ম নিয়ন্ত্রণ করে।

তত্ত্বীয় বিষয়ের প্রাথমিক ভূমিকাস্বরূপ **তর্কবিদ্যা** (**logic**)। বলা বাহুল্য, অ্যারিস্টটল তর্কবিদ্যার জনক। তর্কবিদ্যার **আকার** ও **গঠন** নির্ণয়ে তাঁর অবদান শ্রদ্ধার সঙ্গে স্মরণীয়। ভারতীয় দার্শনিকরাও ন্যায় বা তর্কবিদ্যার প্রশংসা করে বলেছেন,—

প্রদীপঃ সর্ববিদ্যানামুপায়ঃ সর্বকর্মণাম্।
আশ্রয়ঃ সর্বধর্মাণাং বিদ্যোদ্দেশে প্রকীর্তিতা ॥

অর্থাৎ বিভিন্ন বিদ্যা বা বিজ্ঞানের পরিগণনাস্থলে ন্যায়শাস্ত্রকে সর্ববিদ্যার পথপ্রদর্শক আলোক, সর্বধর্মের আশ্রয় বলে প্রশংসা করা হয়েছে।

অ্যারিস্টটল গণিত থেকে তর্কবিদ্যা সংগঠিত করেন। তাঁর প্রদর্শিত পথে বর্তমানে প্রতীকী ন্যায় জ্ঞান-বিজ্ঞানের একটি বিশিষ্ট শাখা হয়ে উঠেছে। এই তর্কবিদ্যায় যে বৈপরীত্যের নীতি (**The Principle of Contradiction**), হেতুপদের বিলোপ সূত্রের (**the law of excluding middle**) অবতারণা করা হয়, তা জ্ঞান-বিজ্ঞানের সর্বত্র ব্যবহৃত হচ্ছে। বৈপরীত্যের নীতির তাৎপর্য হচ্ছে "একই জিনিষ একই সময়ে ও একই ভাবে একটি দ্রব্যের গুণ এবং গুণ নয় হ'তে পারে না।"[১] আর হেতুপদের বিলোপ সূত্রের মূল কথা হচ্ছে, একটি বচন (**Proposition**) হয় সত্য না হয় মিথ্যা হবে। অ্যারিস্টটলের **ত্র্যবয়বী অনুমান** (**Syllogism**) গণিতেও প্রভূত প্রভাব বিস্তার করেছে। এই অনুমানের একটি বহুল প্রচলিত দৃষ্টান্ত নিয়ে ব্যাপারটি স্পষ্ট করা যাক।

সকল মানুষ হয় মরণশীল
সক্রেটিস হয় মানুষ } আশ্রয় বাক্য
∴ সক্রেটিশ হয় মরণশীল } সিদ্ধান্ত[২]

এখানে, দর্শনের ভাষায়, পক্ষপদ=সক্রেটিস, সাধ্যপদ=মরণশীল, হেতুপদ=মানুষ। গণিতের ভাষায়,—

$$a=b$$
$$b=c$$
$$\therefore\ a=c$$

---

১. পাশ্চাত্য দর্শনের ইতিহাস—নীরদবরণ চক্রবর্তী, পৃ—72
২. তদেব — পৃ—70

গণিত ও তর্কবিদ্যার সঙ্গে অতি ঘনিষ্ঠ সম্বন্ধ। বস্তুত আধুনিক গণিত তো যুক্তি-তর্কের সূক্ষ্ম চিন্তা-ভাবনার এক মূর্ত প্রতীক। প্রাচীনকালে ঠিক এমনটি ছিল না। অ্যারিস্টটলেব মতে, মনের বিষয় কালাতীত (timeless) বলে আমরা মনের জন্যই গণিত ও দর্শন বুঝতে পারি। অ্যারিস্টটলের এই ধারণায় গণিত ও দর্শনের মধ্যে সম্বন্ধটি বোঝা গেলেও তা কিন্তু স্পষ্ট নয়। এই সম্পর্কে Russell তাঁর **The Principle of Mathematics** গ্রন্থে বলেছেন,—"Philosophy asks of Mathematics : What does it mean ? Mathematics in the past was unable to answer, and Philosophy answered by introducing the totally irrelevant notion of mind. But now Mathematics is able to answer, so far at least as to reduce the whole of its propositions to certain fundamental notions of logic."

অ্যারিস্টটল গণিত ও দর্শনের সম্বন্ধটি সুস্পষ্টরূপে বিবৃত করুন আর নাই করুন, কিন্তু তিনি তর্কবিদ্যা বা ন্যায়বিদ্যার প্রবর্তন করে খুব সম্ভব মানুষের চিন্তার সূত্রটি ধরতে পেরেছিলেন। আবিষ্কারের ক্ষেত্রে এর মূল্য কম নয়।

গণিতে অবদান

অ্যারিস্টটল যে গণিতজ্ঞ ছিলেন না, তা আর বলার অপেক্ষা রাখে না। তাই স্বাভাবিকভাবেই তাঁর গণিতে নতুন-কিছু ভাবনা ও সূত্রের উদ্ভাবনাও নেই। কিন্তু তবু গণিতের ইতিহাসে তাঁর বিশিষ্ট অবদান আছে। গণিতের স্বরূপ ও প্রকৃতি সম্পর্কে তাঁর দৃষ্টিভঙ্গী এবং ইন্দ্রিয় প্রত্যক্ষের সঙ্গে গণিতের সম্পর্ক বিষয়ে তাঁর মনোভাব পরবর্তী গাণিতিক গবেষণায় গভীর প্রভাব বিস্তার করেছিল। প্লেটো গণিতকে প্রায় ইন্দ্রিয় প্রত্যক্ষের বাইরে রেখেছিলেন। কিন্তু অ্যারিস্টটল বলেন, "গণিতশাস্ত্র একটি ঔপপত্তিক বিজ্ঞান এবং এই শাস্ত্রের আলোচ্য পরিবর্তনশীল বস্তু না হ'লেও এবং তা জড় বিষয় (**Matters**) থেকে স্বতন্ত্র বলে মনে করা হ'লেও তা কখনই জড় বিষয় থেকে সম্পূর্ণ স্বতন্ত্রভাবে থাকিতে পারে না।"[৩] নিত্য সত্তা বা দ্রব্য গণিতের আলোচ্য বিষয় নয়। **Helmholtz**-এর ভাষায় বলা চলে গণিত সম্পর্কে আমাদের দৃষ্টিভঙ্গী : **"Our sensations and presentations are signs, not copies of objects."**[৪]

নিজে গণিতজ্ঞ ছিলেন না বটে, কিন্তু তিনি সে-যুগের গ্রীক গণিতের সঙ্কট সম্পর্কে সম্পূর্ণ অবহিত ছিলেন। তিনি **On the Pythagoreans** নামে একটি

৩, পাশ্চাত্য দর্শনের ইতিহাস—নীরদবরণ চক্রবর্তী, পৃ—79

৪. Substance and function & Einstein's Theory of Relativity—E. Cassirer, Page—304

গ্রন্থ রচনা করেছিলেন, যদিও তা এখন অবলুপ্ত ; জেনোর কূটাভ্যাস সম্পর্কে আলোচনা করেছিলেন ; প্লেটোর গাণিতিক ধারণা তো জানাই ছিল, আর ইউডকসাসের নিঃশেষীকরণ পদ্ধতিও তিনি জানতেন। এমন কি ডিমোক্রিটাসের গাণিতিক ধারণা তাঁর অজ্ঞাত ছিল না।

পরম তত্ত্বদর্শী অ্যারিস্টটল যেমন গণিত ও জ্যামিতির স্বরূপ ও প্রকৃতি সম্বন্ধে সুস্পষ্ট ধারণা গড়ে তুলতে সাহায্য করেছেন, তেমনি গণিতের মূলনীতির ব্যাখ্যা দিয়ে গণিতকে যথাযথ বিজ্ঞানের ওপর স্থাপন করতে সহায়তা করেছেন। আধুনিক গণিতে সর্বত্র স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক চিন্তনের পরাকাষ্ঠা দেখা যায়। অবরোহী পদ্ধতি প্রমাণে একটি প্রমাণ আর একটি প্রমাণের ওপর প্রতিষ্ঠিত, আবার সেই প্রমাণ অন্য একটি প্রমাণের উপর প্রতিষ্ঠিত ইত্যাদি। এইভাবে প্রমাণের শেষ হয় না, যেখান থেকে হোক শুরু করতে হয়। সুতরাং "**there must be a number of statements, called postulates or axioms, which are accepted as true, and for which proof is not required.**"[৫] আধুনিক গণিতজ্ঞদের এই মত অ্যারিস্টটল অতি সুন্দরভাবে ব্যক্ত করেছেন। বস্তুত, স্বতঃসিদ্ধের সংজ্ঞা ও স্বীকার্যের সঙ্গে তার পার্থক্য অ্যারিস্টটলের গণিতে ও বিজ্ঞানে অন্যতম মহৎ অবদান। মনে হয়, তাঁর এই মতই ইউক্লিড গ্রহণ করেছিলেন এবং তার ভিত্তিতে এলিমেণ্টস রচনা করেছিলেন। স্বতঃসিদ্ধ সম্পর্কে মহামতি অ্যারিস্টটলের বক্তব্য :

"It is not everything that can be proved, otherwise the chain of proof would be endless. You must begin somewhere, and you start with things admitted but undemonstrable. These are first principles common to all sciences which are called axioms or common opinions."[৬]

তাঁর মতে স্বতঃসিদ্ধ সাধারণ ধারণা : জ্ঞান-বিজ্ঞানের সর্বত্র এর প্রয়োগ। স্বতঃসিদ্ধ প্রমাণের অপেক্ষা রাখে না,—এ স্বতঃসত্য। সার্বিকতা এর প্রধান লক্ষণ ও বৈশিষ্ট্য। কিন্তু স্বীকার্যের এই লক্ষণ ও বৈশিষ্ট্য নেই। স্বীকার্যও মৌল নীতি বা নিয়ম বটে, কিন্তু বিজ্ঞানের সর্বত্র এর প্রয়োজন নেই,—কোন একটি শাখায় এর প্রয়োগ হতে পারে। অর্থাৎ স্বীকার্য যেন সীমিত স্বতঃসিদ্ধ। সেখানে তার প্রমাণের জন্য অপেক্ষা করতে হয় না সত্য, কিন্তু অন্যত্র তা সত্য বলে না গৃহীতও হতে পারে। আধুনিক যুগের একজন গণিতের ঐতিহাসিক স্বীকার্য সম্পর্কে বলেন, "**The postulates need not be** self-evident but their

৫. What is Mathematics ? —R. Courant & H. Robbins, Page-214
৬. উদ্ধৃতটি M. Kline-এর Mathematics in Western Culture, Page-62 থেকে গৃহীত

truth must then be attested to by the cosequences derived from them."[৭]

অ্যারিস্টটলের মতে স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্যের সংখ্যা খুব কম হওয়া দরকার। ইউক্লিড তাঁর এলিমেণ্টস গ্রন্থে মাত্র পাঁচটি স্বতঃসিদ্ধ ও পাঁচটি স্বীকার্য ব্যবহার করে সাড়ে চারশ'-র ওপর উপপাদ্য প্রমাণ করেছেন। স্বতঃসিদ্ধের উৎপত্তি হয় কিভাবে? ইন্দ্রিয়গ্রাহ্য বস্তু বা দ্রব্যের পর্যবেক্ষণ থেকে মননচর্চার মাধ্যমে স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্য গড়ে ওঠে। বস্তুত এ-সব তাত্ত্বিক দার্শনিকদের মনগড়া কোন কিছু নয়। পুনরাবৃত্তি হলেও উল্লেখ করতে হয়, অ্যারিস্টটল প্লেটোর মত ইন্দ্রিয়গ্রাহ্য কোন-কিছুকে অস্বীকার করেননি। জ্যামিতিক স্বতঃসিদ্ধ সম্পর্কে বিংশ শতাব্দীর অন্যতম শ্রেষ্ঠ গণিতজ্ঞ আঁরি পোঁয়াকারে বলেন,—"The geometrical axioms are…neither synthetic a priori intuitions nor experimental facts. They are conventions."[৮] ইন্দ্রিয়গ্রাহ্য বা প্রত্যক্ষ বস্তুর পর্যবেক্ষণ বা নিয়ম-রীতি যাই হোক না কেন, স্বতঃসিদ্ধের মধ্যে সাধারণীকরণ বা সার্বিক বৈশিষ্ট্য স্বতঃই প্রতীয়মান হয়।

অ্যারিস্টটল ও তাঁর অনুগামীরা পূর্বপ্রচলিত স্বতঃসিদ্ধের উন্নতি সাধন করেছেন। ইউক্লিড কিছু কিছু স্বতঃসিদ্ধ এই মহান দার্শনিকের কাছ থেকে গ্রহণ করেছেন। কিন্তু সবচেয়ে আশ্চর্যের কথা, ঊনবিংশ শতাব্দী পর্যন্ত অনেক গণিতজ্ঞ স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্যের পার্থক্য বুঝতে পারেননি।

সংজ্ঞা (definition) নিয়ে তাঁর আলোচনা যেন একেবারে আধুনিক। তাঁর মতে সংজ্ঞা শব্দের সমাহার। তিনি সংজ্ঞাহীন শব্দ অর্থাৎ যে-সব শব্দের বা পদের সংজ্ঞা দেওয়া যায় না, সে-রকম শব্দ বা পদ ব্যবহার অনুমোদন করেছেন। কারণ, যে-কোন স্থান থেকে শুরু করতেই হবে, তা না হলে **অনবস্থা প্রক্রিয়া** (**Processus in infinitum**) দেখা দেয়। যার সংজ্ঞা দেওয়া হবে তার অবশ্যই **প্রাগভাব** (**prior**) থাকবে। এই প্রসঙ্গে **যার অংশ নেই তা হয় বিন্দু** ("a point is that which has no part"),—বিন্দুর এই সংজ্ঞার সমালোচনা করেছেন। তিনি বলেন, **যার** দ্বারা কোন কিছু বোঝা যাচ্ছে না, খুব সম্ভব **বিন্দু**-কে (**point**) সূচিত করছে। সুতরাং এরকম সংজ্ঞা দেওয়ার কোন অর্থ হয় না। তাঁর মতে, সংজ্ঞা দ্বারা বস্তুর স্বরূপ অর্থাৎ তা কি বোঝা যায়, বাস্তবে বস্তুটি থাকবে কি না থাকবে তাতে কিছু আসে যায় না। অর্থাৎ সংজ্ঞায় বস্তুর অস্তিত্ব বোঝায় না। **বিন্দু**, **রেখা** এরকম কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ ব্যতিরেকে অন্য যে-সব বস্তুর সংজ্ঞা দেওয়া হয়, তাদের প্রমাণ করতে হবে। অ্যারিস্টটল **অস্তিত্ব** বলতে **অংকন** বুঝিয়েছেন। ইউক্লিডের প্রথম তিনটি স্বতঃসিদ্ধে সরলরেখা ও বৃত্তাঙ্কনের অনুমোদন আছে।

৭. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times—M. Kline, Page—2

৮. Science and Hypothesis—H. Poincare', Page,—50

বস্তুত সব গাণিতিক ধারণার অস্তিত্ব অঙ্কনের সাহায্যে দিতে হবে। কোণের ত্রিখণ্ডীকরণ রুলার-কম্পাসের সাহায্যে সম্ভব নয় বলে জ্যামিতিতে এসবের আলোচনা হবে না বলে অ্যারিস্টটল মনে করেন।

তিনি সরলরেখা ও বিন্দুর মধ্যে সম্পর্ক নিয়েও আলোচনা করেছেন। তাঁর মতে বিন্দু অবিভাজ্য, কিন্তু এর অবস্থান আছে। তিনি বলেন, যত বিন্দুই জড়ো করা যাক বা বসানো যাক, আর যতদূর ইচ্ছা ততদূর পর্যন্ত বিস্তৃত করা যাক না কেন, তাকে কখনোই খণ্ডিত বা বিভাজিত করা যাবে না। কিন্তু সরলরেখা খণ্ডিত হয়। সরলরেখার মত বিন্দুর অনবচ্ছিন্নতা নেই,—বিন্দুর পর বিন্দু বসিয়ে অনবচ্ছিন্ন করা যায় না। বিন্দু যেন তাৎক্ষণিক সময়ের মত; তাৎক্ষণিক সময় যেমন অবিভাজ্য, বিন্দুও তেমনি। সময় নিত্য,—এর আরম্ভও নেই, শেষও নেই। বিন্দু সরলরেখার প্রান্ত, প্রারম্ভ বা বিভাজক হতে পারে, কিন্তু **অংশ** নৈব নৈব চ। গতির সাহায্যে কোন বিন্দু সরলরেখা উৎপন্ন করতে পারে, এবং কোন মাত্রা বা পরিমাণের (**magnitude**) মূল হতে পারে। কিন্তু বিন্দুর দৈর্ঘ্য নেই। সুতরাং বিন্দু দিয়ে সরলরেখা উৎপন্ন হলে তার দৈর্ঘ্য থাকতে পারে না।

তাঁর মতে বিন্দু ও সংখ্যা বিচ্ছিন্ন। পাটীগণিতে অনবচ্ছিন্ন বা সন্ততি বলে কিছু নেই। জ্যামিতিক প্রত্যয়ের চেয়ে পাটীগণিতিক প্রত্যয় অনেক বেশী বিমূর্ত। তিনি জ্যামিতির আগে পাটীগণিতের স্থান নির্দেশ করেছেন। কারণ, পাটীগণিতের **তিন** (3)-এর ধারণা উপলব্ধি করলে তবেই জ্যামিতির ত্রিভুজ বোঝা যায়।

অ্যারিস্টটলের **অসীম**-এর (**Infiinity**) ধারণা লক্ষ করার মত। তিনি অসীমকে দুটি ভাগে ভাগ করেছেন ঃ **অব্যক্ত অসীম** (**Potential infinity**) ও **ব্যক্ত অসীম** (**actual infinity**)। ব্যক্ত অসীমের সম্ভাবনায় তাঁর আস্থা নেই, অব্যক্ত অসীমে আস্থা আছে। তিনি বলেন, অসীমের ব্যক্ততা নেই, অব্যক্ততা আছে; বাস্তবতা নেই, সম্ভাবনা আছে। "তিনি বলেন, অসীম দেহ বা বস্তু সম্ভব নয়, কারণ প্রত্যেক দেহ বা বস্তুই দেশে সীমিত।...দেহ বা বস্তুর অবস্থানের কথা ভাবতে গেলেই 'ওপরে', 'নীচে', 'পূর্বে', 'পশ্চিমে' প্রভৃতি দেশগত অবস্থানের কথা ভাবতে হয়।"[৯] কিন্তু অসীমের এরকম অবস্থান হতে পারে না।

তিনি বলেন, অসীম সংখ্যা (**Infinite number**) গণনা করা অসম্ভব। কারণ, সংখ্যা অনির্দিষ্টভাবে বাড়িয়ে যাওয়া যায়, এক, দুই, তিন ইত্যাদি এই রূপে। দেশ ও কালের সঙ্গে সংখ্যার পার্থক্য হচ্ছে দেশ ও কাল অসীম ভাগে বিভাজ্য, কিন্তু সংখ্যায় তা সম্ভব নয়,—অসীম ভাগে বিভাজ্য নয়। অবশ্য সংখ্যার একটা নিম্নতম একক আছে, আর তা অবিভাজ্য।

সর্বজনবিদিত, বিশ্বকাব্য-সাহিত্যে রবীন্দ্রনাথের বিশিষ্ট আসন; আর বাংলা

৯. পাশ্চাত্য দর্শনের ইতিহাস—নীরদবরণ চক্রবর্তী, পৃ—92

কাব্য-সাহিত্যে তো তিনি একছত্র সম্রাট। তাঁকে এড়িয়ে কোন কিছু করা একরকম অসম্ভব বলেই মনে হয়। তাই এক বিশিষ্ট কবি-সাহিত্যিক বলেছেন ঃ

"সম্মুখে বসিয়া আছে রবীন্দ্র ঠাকুর।"

তেমনি জ্ঞান-বিজ্ঞানে কোন-কিছু লেখায় অ্যারিস্টটলকে এড়িয়ে চলা যায় না। তিনি সর্ববিদ্যা বিশারদ, বহুমুখী প্রতিভার অধিকারী। জীববিজ্ঞানের মত গণিত, জ্যোতিষ ও পদার্থ বিজ্ঞানে তাঁর যুগান্তকারী বা বিস্ময়কর তেমন আবিষ্কার নেই সত্য, কিন্তু তবুও তিনি সমসাময়িক ও পরবর্তী চিন্তাশীলতার জগতে অসামান্য প্রভাব বিস্তার করেছিলেন। তাই বুঝি ঊনবিংশ শতাব্দীর অন্যতম শ্রেষ্ঠ বিজ্ঞানী বিবর্তন তত্ত্বের প্রবক্তা চার্লস ডারউইন বলেছিলেন ঃ

"Linnaeus and Cuvier have been my two Gods, though in very different ways, but they were mere school boys to old Aristotle."[১০] শুধু লিনিয়াস ও কুভিয়ের কেন, অ্যারিস্টটল তাঁর যুগে যে বৈজ্ঞানিক উত্তরাধিকার পেয়েছিলেন, সেই প্রেক্ষাপটে বিচার করলে আমাদের এই বিংশ শতাব্দীর অনেক তথাকথিত বিজ্ঞানী ও মনস্বীই স্কুলের শিশু ছাড়া আর কি। বস্তুত, আমাদের প্রপিতামহদের চেয়ে আমরা একটুও বেশী বুদ্ধিমান হইনি।

---

১০. **Darwin's Life and Letters, III, Page—252**

অষ্টম অধ্যায়

ইউক্লিড ও এলিমেণ্টস

"Euclid alone
Has looked on Beauty bare, Fortunate they
Who, though once only and then but far away
Have heard her massive sandal set on stone.

Edna St Vincent Millay*

"মানবসভ্যতার ইতিহাসে এমন কিছু সৃজনধর্মী রচনা দেখতে পাওয়া যায়, যে-সব রচনার গুরুত্ব ও বৈশিষ্ট্য আজও অম্লান ও আদর্শ হয়ে আছে। প্লেটো ও অ্যারিস্টটলের রাষ্ট্রবিজ্ঞান, দর্শন ও অলঙ্কার সম্পর্কিত রচনাগুলি তার উদাহরণ। গণিত ও বিজ্ঞানের ক্ষেত্রে কিছু রচনা মানুষের চিন্তা-জগতে বিপ্লব সূচনা করেছে, —বহু পুরাতন ধ্যান-ধারণার আমূল পরিবর্তন সাধিত করেছে। গ্যালেলিও কোপারনিকাস, নিউটন, ডারইন, আইনস্টাইন প্রমুখের রচনা এ বিষয়ে উল্লেখযোগ্য। তাঁদের আবিষ্কৃত তত্ত্ব ও সূত্র আজও স্বমহিমায় উজ্জ্বল। আবার কিছু কিছু পাঠ্য পুস্তকও সমসাময়িক কালে অপ্রতিহত প্রভাব বিস্তার করে জনপ্রিয়তা অর্জন করেছে। যেমন,—লেজেণ্ডারের **E'leménts de Géometric** এক সময় এমন জনপ্রিয়তা অর্জন করেছিল যে, এই গ্রন্থ সমগ্র ইউরোপে পাঠ্যপুস্তকরূপে নির্দিষ্ট হয়েছিল। ল্যাগরেঞ্জের **Mécanique Analytique** বইটিকে চমৎকারিত্বের জন্য **"a kind of scientific poem"** নামে অভিহিত করা হয়। কিন্তু এগুলি কালজয়ী হয়ে উঠতে পারেনি। সেকালের জনপ্রিয়তা ও সমাদর আর একালে নাই।"[১] কিন্তু ইউক্লিডের **এলিমেণ্টস** (**Elements**) কালজয়ী,—**2300** বছর ধরে মহাসমাদরে পঠিত হয়ে আসছে।

এই মহাগ্রন্থের তুলনা মেলা ভার,—যুগ যুগ ধরে পঠিত হয়েছে, আজও হচ্ছে। রামায়ণ-মহাভারত, ইলিয়াড-ওডেসি যেমন সবচেয়ে বেশী পঠিত মহাকাব্য, তেমনি এলিমেণ্টস ; গীতা-বাইবেল-কোরাণ প্রভৃতি যেমন সবচেয়ে বেশী পঠিত ধর্মগ্রন্থ, তেমনি এলিমেণ্টস। ছাত্র-শিক্ষক-বিদ্বান-রাজনীতিবিদ প্রমুখ সবার কাছে এই গ্রন্থের মহাসমাদর। আব্রাহাম লিঙকন নাকি তাঁর নৈয়ায়িকতা ও ভাষায় শান দেবার জন্য গভীর রাত পর্যন্ত বালিশের পাশে বাতি জ্বালিয়ে এলিমেণ্টস পড়তেন,

---

* উদ্ধৃতিটি Mathematics in Western Culture গ্রন্থ থেকে গৃহীত।

১. **একটি** অবিস্মরণীয় পাঠ্যপুস্তক—**নন্দলাল মাইতি, জ্ঞান ও বিজ্ঞান, নভেম্বর, 1979**

আর তখন তাঁর সহকর্মী আইনজীবী বন্ধুরা "**filled the air with interminable snoring**". একথা সত্য, ইউক্লিডীয় জ্যামিতির প্রয়োগ সীমিত ক্ষেত্রে। কিন্তু তা হলেও এই জ্যামিতি নিজ ক্ষেত্রে নিজ মহিমায় উজ্জ্বল। কবি কীটস-এর অনুসরণে বলা যায়, "**Euclid is truth, truth Euclid**".

ইউক্লিডের জীবনের টুকরো

কিন্তু দুঃখের বিষয়, এই মহানায়কের ব্যক্তি জীবনের পরিচয় আমরা কিছুই জানি না। তবে মহামতি অ্যারিস্টটল ও ইউক্লিড প্রায় সমসাময়িক ছিলেন। অ্যারিস্টটল 384-322 খ্রীস্টপূর্বাব্দ পর্যন্ত বর্তমান ছিলেন, আর ইউক্লিডের জন্ম 365 খ্রীস্টপূর্বাব্দ বলে অনুমান করা হয়। এবং তাঁর মহাগ্রন্থ **এলিমেণ্টস**-এর রচনাকাল 330-320 খ্রীস্টপূর্বাব্দ বলে গ্রহণ করা হয়। তিনি এথেন্সে প্লেটোর অ্যাকামেডীতে পড়াশোনা করে থাকবেন। তাঁর ওপর প্লেটো ও অ্যারিস্টটলের প্রভাব দেখা যায়,—তবে অ্যারিস্টটলের প্রভাব অধিক বলে মনে হয়। আনুমানিক 300 খ্রীস্টপূর্বাব্দ নাগাদ তিনি আলেকজান্দ্রিয়ায় মিউজিয়ামে গণিতের অধ্যাপক নিযুক্ত হন। মিউজিয়াম গ্রন্থাগারের গণিত শাখার কিউরেটার ছিলেন তিনি এবং গণিতের অধ্যাপনায় ছিল তাঁর খ্যাতি। পিতার নাম **নাউক্রাটেস**।*

এলিমেণ্টস (Elements)

ইউক্লিডের এলিমেণ্টস রচনার উদ্দেশ্য নিয়ে বিতর্ক আছে। কেউ কেউ বলেন, এই গ্রন্থটি গণিতজ্ঞদের উদ্দেশ্যে লেখা ; আবার কেউ কেউ বলেন, এটি পাঠ্যপুস্তক হিসাবে ছাত্রদের উদ্দেশ্য করে লেখা। প্রোক্লাসের মত হচ্ছে বইটি পাঠ্যপুস্তক।

এলিমেণ্টস তেরো খণ্ডে বিভক্ত। ইংরেজীতে এই খণ্ডগুলির নাম '**বুক**' (**book**)। আনুমানিক 40 বছর বয়সে তিনি এই গ্রন্থ রচনা করেন। সত্য কথা বলতে কি, এই গ্রন্থটি তাঁর মৌলিক রচনা নয়। তাঁর সমসাময়িক ও পূর্বেকার প্রচলিত সব জ্যামিতিক আবিষ্কার ও গবেষণা তিনি একত্র করেছেন, সজ্জিত ও সংগঠিত করেছেন। অর্থাৎ এটি একটি সংকলন গ্রন্থ। যেমন,—তাঁর গ্রন্থে ইউডকসাসের অনেক গবেষণা অনুপ্রবিষ্ট হয়েছে এবং **থিয়েটিটাস**-এর (**Theaetetus**) অনেক উপপাদ্য এই সংকলনে স্থান পেয়েছে। গ্রীক গণিতের বিখ্যাত ঐতিহাসিক অলম্যান বলেন, **I, II** ও **IV** নং বই-এ প্রমাণিত বিষয়গুলি সব পীথাগোরীয় সম্প্রদায়ের অবদান, আর **VI** নং বই-এর বিষয়গুলি ইউডকসাসের অবদান,—বিশেষত সমানুপাত ও অমেয় সম্পর্কিত বিষয়গুলি ; **X** ও **XIII** নং

* ইউক্লিড—ডঃ দিলীপকুমার সিংহ, বিশ্বকোষ, তৃতীয় খণ্ড, সাক্ষরতা প্রকাশন ; History of Greek Mathematics (vol.—I), T.L. Heath.

বই-এর অধিকাংশ থিয়েটিটাস-এর গবেষণাপ্রসূত ; কিন্তু X নং-এর অংশবিশেষ ইউক্লিডের মৌলিক রচনা।

গ্রন্থটি শুরু হয়েছে কতকগুলি **সংজ্ঞা** দিয়ে। সমালোচকরা বলেন, এই সংজ্ঞাগুলির কোন নৈয়ায়িক (**logical**) ভিত্তি নেই। কেবল স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্যগুলির ধারণা গড়ে তোলার জন্য এর প্রয়োজন ছিল। যাই হোক, তারপর আছে পাঁচটি স্বীকার্য ও পাঁচটি সাধারণ ধারণা (**common notion**) বা স্বতঃসিদ্ধ। পাঁচটি স্বীকার্য ও পাঁচটি স্বতঃসিদ্ধ মোট এই দশটি দিয়ে দশদিক আবৃত করেছেন ইউক্লিড,—তাঁর জ্যামিতির বিশাল ইমারৎ গড়ে তুলেছেন। উদাহরণস্বরূপ এখানে কয়েকটি সংজ্ঞা, স্বীকার্য ও স্বতঃসিদ্ধের উল্লেখ করা হলো।

সংজ্ঞা

1. যার অংশ নেই, তা-ই হচ্ছে বিন্দু।
2. রেখা প্রস্থহীন দৈর্ঘ্য। { এখানে রেখা (**line**) অর্থে বক্ররেখা }
3. যে-কোন রেখার প্রান্তদ্বয় বিন্দু।
4. সরলরেখা এমন রেখা যার উপরিস্থিত বিন্দুগুলি সমভাবে বণ্টিত।
5. যার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে, তা-ই তল (**surface**)।
6. তলের প্রান্ত হচ্ছে রেখা।
7. একই তলে অবস্থিত সরলরেখা উভয় দিকে অনির্দিষ্টভাবে বর্ধিত হলে যদি মিলিত না হয়, তা হলে তাদের সমান্তরাল সরলরেখা বলা হবে।

স্বীকার্য

1. এক বিন্দু থেকে আর এক বিন্দু পর্যন্ত সরলরেখা টানা সম্ভব।
2. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে অনবচ্ছিন্নভাবে সরলরেখারূপে বর্ধিত করা সম্ভব।
3. যে-কোন কেন্দ্র ও দূরত্বের (ব্যাসার্ধ) সাপেক্ষে বৃত্তাঙ্কন সম্ভব।
4. সব সমকোণ পরস্পর সমান।
5. যদি একটি সরলরেখাকে ছেদ করে একই দিকে উৎপন্ন দুইটি অন্তঃকোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তা হলে সরলরেখা দুইটি অনির্দিষ্টভাবে বর্ধিত হলে যে-দিকের অন্তঃকোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, সেই দিকে তারা পরস্পরকে ছেদ করবে।

স্বতঃসিদ্ধ

1. যে-সব বস্তুর প্রত্যেকটি একই বস্তুর সমান, তারা পরস্পর সমান।
2. সমান সমান রাশির সঙ্গে সমান সমান রাশি যোগ করলে সমষ্টিগুলিও সমান হয়।
3. সমান সমান রাশি থেকে সমান রাশি বিয়োগ করলে অবশিষ্টগুলিও সমান হয়।
4. যে-সব রাশি (রেখা, কোণ বা ক্ষেত্র) পরস্পরের সঙ্গে মিলে যায় (অর্থাৎ একটি অপর যে-কোনটির ওপর সমাপতিত হতে পারে), তারা পরস্পর সমান।
5. সম্পূর্ণ রাশি তার যে-কোন অংশের চেয়ে বড়।

স্বীকার্য ও স্বতঃসিদ্ধ প্রসঙ্গে দু-চার কথা

ইউক্লিড তাঁর স্বীকার্য ও স্বতঃসিদ্ধগুলির জন্য সমালোচিত হয়েছেন। সেই গ্রীক যুগ থেকেই নানা সময়ে গণিতজ্ঞরা নানা মন্তব্য করেছেন। অবশ্য এই দশটির সবগুলি নিয়ে সমালোচনা হয়নি,—বিশেষ বিশেষ কয়েকটি নিয়ে হয়েছে। প্রথম স্বীকার্য সম্বন্ধে ইউক্লিড নিঃসন্দেহ ছিলেন। তাঁর মতে এটি একক। বস্তুত এই স্বীকার্যে সরলরেখার কথা বলা হয়েছে বটে, কিন্তু এই সম্বন্ধে আমাদের ধারণা স্পষ্ট করছেনা। দ্বিতীয় স্বীকার্যটিকেও ইউক্লিড একক বলে মনে করেন। উভয় দিকে বর্ধিত করা প্রসঙ্গে ইউক্লিড প্রথম খণ্ডে কিছু আলোচনা করেননি, একাদশ খণ্ডে করেছেন। "কিন্তু এটি অভ্রান্ত সত্য নয়। কারণ দুটি রেখাংশকে উভয়দিকে যদৃচ্ছ বৃদ্ধি করলে তাদের কি দশা হবে, সে-বিষয়ে আমাদের এমন কোন বাস্তব অভিজ্ঞতা নাই। সীমিত ক্ষেত্রে প্রয়োগের বেলায় এটি সত্য হতে পারে, কিন্তু অনন্ত পর্যন্ত বৃদ্ধি করলে কি হবে ?…স্বয়ং ইউক্লিডেরও এই স্বীকার্য সম্বন্ধে সন্দেহ ছিল বলে মনে হয়। কারণ, তাঁর জ্যামিতিতে কোথাও তিনি অনন্ত পর্যন্ত বিস্তৃত রেখাংশের সাহায্যে কোন উপপাদ্য প্রমাণ করেননি।"[১]

কিন্তু এহো বাহ্য, যত বাক-বিতণ্ডা পঞ্চম স্বীকার্যটিকে কেন্দ্র করে। প্রাচীন কাল থেকেই এটি নিয়ে মাঝে মাঝে বিতর্ক দেখা দিয়েছে। এটি একদিকে যেমন ইউক্লিডের প্রতিভার অন্যতম শ্রেষ্ঠ নিদর্শন, তেমনি আবার তাঁর কলঙ্কও বটে। সন্দেহ নেই, ইউক্লিড এই স্বীকার্যটির প্রয়োজনীয়তা বোধ করেছিলেন। কিন্তু গ্রীক গণিতজ্ঞরা এর সত্যতা সম্বন্ধে নিঃসন্দেহ ছিলেন না,—প্রতিবাদের সুর তাঁদের লেখায় দেখা যায়। তাঁদের মতে এটি স্বতঃপ্রমাণিত নয় ; সুতরাং অন্যগুলির মত এর আবেদন নেই। গ্রীক যুগে অবশ্য অন্যান্য স্বীকার্য ও স্বতঃসিদ্ধ থেকে

১, ইউক্লিডের পর—নন্দলাল মাইতি, বিজ্ঞান প্রদীপ, মার্চ, 1981

এটি প্রমাণ করার প্রচেষ্টা করা হয়েছিল, কিন্তু সম্ভব হয়নি। যাই হোক,—প্রায় 2200 বছর পরে **লোবাচেভস্কি** ও **বোলয়াই** এই স্বীকার্যটিকে আক্রমণ করে অভিনব জ্যামিতি আবিষ্কার করতে সমর্থ হয়েছিলেন, কিন্তু তা এখানে আলোচনা করার অবকাশ ও সুযোগ নেই।

গণিতজ্ঞদের মধ্যে ও গণিতের ঐতিহাসিকদের মধ্যে এরূপ মতভেদ আছে যে, কোন স্বতঃসিদ্ধগুলি প্রকৃতপক্ষে ইউক্লিডের। চতুর্থ স্বতঃসিদ্ধ সম্বন্ধে সমালোচনা করে বলা হয় একটির ওপর আর একটি স্থাপন করে প্রমাণ করা জ্যামিতিধর্মী। সুতরাং একে স্বতঃসিদ্ধ না বলে স্বীকার্য বলা উচিত। এমন মন্তব্যও করা হয়, ইউক্লিডও খুব সম্ভব এ ধরনের প্রমাণে আকৃষ্ট ছিলেন না,—আদৌ সন্তুষ্ট ছিলেন না। তিনি হয়তো পূর্বসূরীদের কোন প্রমাণ বা পদ্ধতি থেকে এটি গ্রহণ করে থাকবেন, এবং রীতি রক্ষার জন্যই এলিমেণ্টস-এ অন্তর্ভুক্ত করেছেন।

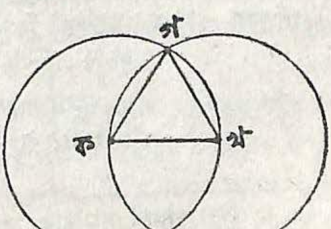
এলিমেণ্টসের সংক্ষিপ্ত বিববরণ

প্রথম খণ্ডে ইউক্লিড ত্রিভুজের সর্বসমতা, সমান্তরাল সরলরেখা, প্রাথমিক অঙ্কনাদি, সামন্তরিক, সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ক্ষেত্রের, পীথাগোরীয় উপপাদ্য ইত্যাদি আলোচনা করেছেন। প্রকৃতপক্ষে, এখানে ঋজুরেখ ক্ষেত্র বিষয়ে আলোচনাই দেখা যায়। স্কুলে এ-সবের অনেকগুলিই পড়তে হয় বলে প্রমাণাদি সবার জানা। তবুও নমুনাস্বরূপ আমরা এখানে কয়েকটি প্রতিজ্ঞার উল্লেখ করলাম মাত্র।

প্রতিজ্ঞা—1 ঃ প্রদত্ত সরলরেখার ওপর একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

অনেকেই হয়তো জানেন, রেভারেণ্ড কৃষ্ণমোহন বন্দ্যোপাধ্যায় বাংলা ভাষায় সার্থক জ্যামিতি রচনা করেন। ইউক্লিডের এলিমেণ্টস-এর প্রথম তিন খণ্ড অবলম্বনে তিনি **বিদ্যাকল্পদ্রুম**-এর দ্বিতীয় কাণ্ড **ক্ষেত্রতত্ত্ব প্রথম ভাগ** আর নবম কাণ্ড **ক্ষেত্রতত্ত্ব দ্বিতীয় ভাগ** রচনা করেন। তিনি যেভাবে সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন আলোচনা করেছিলেন, তা উদ্ধৃতিসহযোগে নিম্নে প্রদত্ত হলো ঃ

"কখ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা ইহার উপর এক সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।



চিত্র—15

ক কেন্দ্র হইতে কখ দূর পর্যন্ত এক বৃত্ত অঙ্কিত কর তাহার নাম খগঘ হউক এবং খ কেন্দ্র হইতে খক দূর পর্যন্ত আর এক বৃত্ত অঙ্কিত কর তাহার নাম কগঙ—যে বিন্দুতে এই দুই বৃত্ত পরস্পর অবচ্ছিন্ন হয় অর্থাৎ গ চিহ্ন, তাহা হইতে ক ও খ পর্যন্ত দুই সরলরেখা টান অর্থাৎ কগ এবং খগ রেখা

কর—তাহাতে কখগ এক সমবাহু ত্রিভুজ হইবে।"[২]

প্রতিজ্ঞা—2 : একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়ে প্রদত্ত সরলরেখার সমান সরলরেখা অঙ্কন কর।

প্রতিজ্ঞা—4 : একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও অন্তর্ভূত কোণ অপর ত্রিভুজের অনুরূপ দুইটি বাহু ও কোণের সমান হলে, তারা সর্বসম।

প্রতিজ্ঞা—5 : সমদ্বিবাহু ত্রিভূজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি পরস্পর সমান।
এই উপপাদ্যটি **রাসভসেতু**[৩] (**Bridge of Asses**) নামে বিখ্যাত। মধ্যযুগে ইউরোপে ইউক্লিডের পাঠ এই পর্যন্ত নির্দিষ্ট ছিল। এরপর ইউক্লিডের প্রমাণাদি দুর্বোধ্য ও জটিল বলে বিবেচিত হতো।

প্রতিজ্ঞা—16 : ত্রিভুজের বহিঃকোণ বিপরীত অন্তঃকোণের চেয়ে বড় হবে।

প্রতিজ্ঞা—20 : ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রতিজ্ঞা—27 : একটি সরলরেখা দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করলে যদি একান্তর কোণগুলি পরস্পর সমান হয়, তা হলে সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল।

প্রতিজ্ঞা—44 : একটি কোণ ও ত্রিভুজ প্রদত্ত আছে ; একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার ওপর ওই ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি সামন্তরিক অঙ্কন করতে হবে।
এই সম্পাদ্যটি নানা কারণে সবিশেষ উল্লেখযোগ্য। সেইজন্যই সম্ভবত অনুরূপ একটি সম্পাদ্য স্কুলের মাধ্যমিক পাঠ্যসূচীতে স্থান পেয়েছে। এখানে একটি ক্ষেত্র আর একটি ক্ষেত্রে রূপান্তরিত করার তত্ত্ব আলোচিত হয়েছে। অ্যারিস্টটলীয় যুগের গণিতের ঐতিহাসিক ইউডিমাস (**Eudemus**) এই তত্ত্বটি পীথাগোরীয় সম্প্রদায়ের অবদান বলে বর্ণনা করেন। লক্ষণীয়, প্রদত্ত কোণটি সূক্ষ্মকোণ না হয়ে সমকোণ হলে সামন্তরিকের পরিবর্তে আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করা যায়।

প্রতিজ্ঞা—47 : সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুইটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।
বলা বাহুল্য, এইটি সেই বিখ্যাত পীথাগোরীয় উপপাদ্য। কিন্তু এই উপপাদ্যের উদ্ভব, বিকাশ বিশ্বের অন্যত্রও দেখা যায়।[৪]

---

২. বিদ্যাকল্পদ্রুম কৃষ্ণমোহন বন্দ্যোপাধ্যায়—নন্দলাল মাইতি, জ্ঞান বিচিত্রা, আগস্ট, 1982

৩. লেখকের 'গণিতের ললিত পাঠ' দ্রষ্টব্য।

৪. লেখকের 'প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিবৃত্ত' দ্রষ্টব্য।

যাই হোক জ্যামিতিতে বীজগণিতের প্রয়োগ এখানে লক্ষণীয়,—

$$a^2+b^2=c^2 \text{ ।}$$

প্রথম খণ্ডে জ্যামিতিতে বীজগণিতের প্রয়োগ দেখা গেলেও, দ্বিতীয় খণ্ডে এই বিষয়ের উপস্থিতি বিশেষভাবে লক্ষণীয়। গ্রীকরা অমূলদ তথা অমেয় রাশিতে অস্বস্তিবোধ করত। তাই তারা দৈর্ঘ্য, ক্ষেত্রফল, আয়তন, ইত্যাদিতে সংখ্যা ব্যবহার না করে এদের জ্যামিতিক দিক নিয়ে আলোচিত করত,—সংখ্যার পরিবর্তে রেখাংশ ব্যবহার করত। গ্রীকদের কাছে **দুইটি সংখ্যার গুণফলের** অর্থ **আয়তক্ষেত্র**, আর **তিনটি সংখ্যার গুণফল আয়তন ; দুইটি সংখ্যার সমষ্টির** অর্থ একটি রেখার সেই পরিমাণ বিস্তৃতি বা বৃদ্ধি, **বিয়োগের** অর্থ দ্বিতীয় রেখা থেকে **কেটে নেওয়া**, আর **ভাগ** মানে **দুইটি রেখার অনুপাত**। দ্বিতীয় খণ্ডের প্রথম দশটি জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞার মধ্যে নিম্নরূপ বীজগাণিতিক সূত্রগুলির সন্ধান পাওয়া যায়। এখানে তার কয়েকটি আধুনিক বীজগাণিতিক ভাষায় প্রকাশ করা হলো ঃ

1. $a(b+c+d+e+\cdots)=ab+ac+ad+ae\cdots$
2. $a(a+b)+b(a+b)=(a+b)^2$
3. $a(a+b)=a^2+ab$
4. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
5. $ab+\{\frac{1}{2}(a+b)-b\}^2=\{\frac{1}{2}(a+b)\}^2$
6. $(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$

বলা বাহুল্য, উপরিলিখিত সূত্রাকারে ইউক্লিড কোন-কিছুই উপস্থাপিত করেননি,—যা করেছেন সবই জ্যামিতিক উপপাদ্যের আকারে। চতুর্থ বীজগণিতিক সূত্রের জ্যামিতিক বিবৃতি এরকম ঃ

একটি সরলরেখাকে যদৃচ্ছ ছেদ করলে মূল সরলরেখার ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র রেখাংশ দুইটির ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ও রেখাংশদ্বয় দ্বারা উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমান হবে।

প্রথম বীজগাণিতিক সূত্রের জ্যামিতিক বিবৃতি ঃ

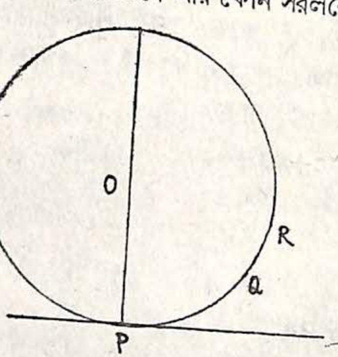
দুইটি সরলরেখার একটিকে যদৃচ্ছ অংশে বিভক্ত করলে মূল সরলরেখাদ্বয় দ্বারা উৎপন্ন আয়তক্ষেত্র, অবিভক্ত সরলরেখা ও প্রত্যেক রেখাংশ দ্বারা উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান হবে।

তৃতীয় খণ্ডে মোট 37টি প্রতিজ্ঞা আছে। বৃত্তের সংজ্ঞা দিয়ে শুরু করে, জ্যা, স্পর্শক, কেন্দ্রস্থ কোণ প্রভৃতির ধর্ম দিয়ে আলোচনা করেছেন ইউক্লিড। এখানে ষোড়শ প্রতিজ্ঞাটির বিশেষ গুরুত্ব আছে। এখানে তিনি এক ধরনের কোণ নিয়ে আলোচনা করেছেন। গ্রীকরা এই বিশেষ কোণটির নাম দিয়েছিল **শৃঙ্গ-কোণ** (**horn angle**)। এই কোণটির অস্তিত্ব ও মাত্রা বা পরিমাণ (**magnitude**) নিয়ে গ্রীক যুগ থেকেই বিতর্ক শুরু হয়, আর রেনেশাঁর সময়

পর্যন্ত চলে। কার্ডান, ভিয়েটা, গ্যালেলিও, ওয়ালিশ প্রমুখ গণিতজ্ঞরাও আলোচনায় অংশ গ্রহণ করেন। গ্রীক যুগের প্রোক্লাস একে কোণ বলে স্বীকৃতি দেন। প্রচলিত সংজ্ঞা অনুযায়ী দুইটি বক্ররেখার অন্তর্গত শৃঙ্গ-কোণের মান শূন্য।

প্রতিজ্ঞা 16 ঃ ব্যাসের প্রান্ত-বিন্দু দিয়ে সমকোণে কোন সরলরেখা টানলে, তা বৃত্তের বাইরে থাকবে, এবং পরিধি ও সরলরেখার মধ্যে আর কোন সরলরেখা অঙ্কন করা যাবে না ; অধিকন্তু যে-কোন ঋজুরেখ সূক্ষ্মকোণ অপেক্ষা অর্ধবৃত্তের কোণ বৃহত্তর এবং অবশিষ্ট কোন ক্ষুদ্রতর হবে।

চিত্রে ইউক্লিড **TP** স্পর্শক ও **PQR** চাপের মধ্যবর্তী স্থান এবং **P**-এর মধ্য দিয়ে এই স্থানে যে আর কোন সরলরেখা টানা যাবে না,—এই কথা বলেছেন। তা ছাড়া তিনি **TP** ও **PQR**-এর মধ্যবর্তী কোণের কথাও-বিবেচনা করেছেন। বস্তুত, এই কোণটিই গ্রীকদের **শৃঙ্গ-কোণ** ; এর পরিমাণই তর্কের বিষয়। প্রতিজ্ঞা থেকে জানতে পারা যাচ্ছে যে, যে-কোন ঋজুরেখ সূক্ষ্মকোণ অপেক্ষা এই কোণ ছোট হবে ; কিন্তু এর পরিমাপ শূন্য হবে, একথা বলা হয়নি।



চিত্র—16

চতুর্থ খণ্ডেও ইউক্লিড বৃত্ত বিষয়ক উপপাদ্যের উপস্থাপন করেছেন। বৃত্তে অন্তর্লিখিত ও পরিলিখিত ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, বহুভুজ, সুষম ষড়ভুজ নিয়ে আলোচনার পর শেষ প্রতিজ্ঞায় সুষম পঞ্চদশ-ভুজ কিভাবে অন্তর্লিখিত করা যায়, তার বিবরণ আছে।

পঞ্চম ও ষষ্ঠ খণ্ড দুইটি মূলত ইউডকসাসের গবেষণার ওপর প্রতিষ্ঠিত। পঞ্চম খণ্ড সম্বন্ধে অনেক প্রশংসা ও সাধুবাদ আছে। প্রখ্যাত গণিতজ্ঞ, গণিতের ঐতিহাসিক ও দার্শনিক **De Morgan**-এর মতে **"the fifth book of Euclid's Elements and the logic of Aristotle are the two most unobjectionable and unassailable treatises ever written."**[৫] বস্তুত, এই খণ্ডটি ইউক্লিডের প্রতিভার সর্বশ্রেষ্ঠ অবদান ও কৃতিত্ব বললে অত্যুক্তি করা হয় না। কিন্তু আবার এই খণ্ডের বিষয়বস্তু ও তাৎপর্য ও অর্থ নিয়ে পণ্ডিতদের মধ্যে প্রচুর বিতর্ক হয়েছে।

এখানে সমানুপাতের আলোচনা আছে। অমেয় রাশির অনুপাতের কথা থাকলেও অমূলদ রাশি এড়িয়ে চলা হয়েছে। এখানে মাত্রা বা পরিমাণ-এর

৫. The History of the Calculus and its Conceptual Development—C. B. Boyer, Page—45

(**magnitude**) যে সংজ্ঞা আছে, তা সুস্পষ্ট নয়। ইউক্লিড মাত্রার সংজ্ঞা এরকম দিয়েছেন ঃ

সংজ্ঞা 1 ঃ মাত্রা বা পরিমাণ হচ্ছে মাত্রা বা পরিমাণের অংশ,—বড়র পরিমাপের ক্ষেত্রে ছোট।

সংজ্ঞা 3 ঃ অনুপাত হচ্ছে সমপ্রকার দুইটি মাত্রার মধ্যে এক ধরনের আকারগত (size) সম্পর্ক।

সংজ্ঞা 6 ঃ যে-সব মাত্রার অনুপাত সমান তারা সমানুপাত।

সংজ্ঞা 8 ঃ তিনটি রাশির সমানুপাত লঘিষ্ঠ হওয়া সম্ভব।

নংজ্ঞা 9 ঃ তিনটি রাশি সমানুপাতিক হলে, প্রথম ও তৃতীয়ের অনুপাত প্রথম ও দ্বিতীয়ের বর্গের অনুপাতের সমান।

অর্থাৎ, $\frac{A}{B}=\frac{B}{C}$ হলে, $\frac{A}{C}=\frac{A^2}{B^2}$

সংজ্ঞা 10 ঃ চারটি রাশি ক্রমিক সমানুপাতী হলে, প্রথম ও চতুর্থের অনুপাত প্রথম ও দ্বিতীয়ের অনুপাতের ঘনর সমান।

অর্থাৎ $\frac{A}{D}=\frac{A^3}{B^3}$, যখন $\frac{A}{B}=\frac{B}{C}=\frac{C}{D}$

পঞ্চম খণ্ডে মাত্রা ও মাত্রানুপাত সম্পর্কে 25টি প্রতিজ্ঞা আছে। ইউক্লিড সংজ্ঞা ও স্বতঃসিদ্ধের ওপর নির্ভর করে প্রমাণ দিতে চেয়েছেন,—মৌখিক প্রমাণ। স্বীকার্যগুলি এখানে ব্যবহৃত হয়নি। এখানে, **m, n** ও **p** অখণ্ড সংখ্যা এবং **a, b** ও **c**-কে মাত্রা বা পরিমাণ হিসাবে গণ্য করে কয়েকটি প্রতিজ্ঞার আধুনিক বীজগাণিতিক ভাষায় বর্ণনা দেওয়া হলো ঃ

প্রতিজ্ঞা—4 ঃ যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তা হলে $\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd}$ হবে।

প্রতিজ্ঞা—11 ঃ যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ এবং $\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ হয়, তা হলে $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$ হবে।

প্রতিজ্ঞা—12 ঃ যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ হয়, তা হলে $\frac{a}{b}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$ হবে।

প্রতিজ্ঞা—17 ঃ যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তা হলে $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ হবে।

প্রতিজ্ঞা—18 ঃ যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তা হলে $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ হবে।

ষষ্ঠ খণ্ডে সমানুপাত তত্ত্বের ওপর নির্ভর করে সদৃশ ক্ষেত্র সম্বন্ধে আলোচনা আছে। আগের খণ্ডগুলির মত এখানেও সংজ্ঞা দিয়ে শুরু করা হয়েছে। প্রথমেই

আছে সদৃশ ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সংজ্ঞা, বহিঃ ও মধ্য অনুপাতের সংজ্ঞা, উচ্চতার সংজ্ঞা। উচ্চতার সংজ্ঞা সুস্পষ্ট নয়, কিন্তু ইউক্লিড এটি প্রয়োগ করেছেন।

সংজ্ঞা—4 ঃ যে-কোন ক্ষেত্রের উচ্চতা হচ্চে শীর্ষবিন্দু থেকে ভূমি পর্যন্ত অঙ্কিত লম্ব।

মোট 33টি উপপাদ্য বা প্রতিজ্ঞার মধ্যে ইউক্লিড ত্রিভুজ ও সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সম্পর্ক নিয়ে আলোচনা করেছেন। সদৃশ ত্রিভুজ, সদৃশকোণী ত্রিভুজ ইত্যাদির আলোচনাও আছে। দু-একটি প্রতিজ্ঞার উল্লেখ করা হলো ঃ

প্রতিজ্ঞা—12 ঃ প্রদত্ত তিনটি সরলরেখার চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর।

প্রতিজ্ঞা—13 ঃ প্রদত্ত দুইটি সরলরেখার মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় কর।

এই প্রতিজ্ঞাটি মাধ্যমিক ছাত্র-ছাত্রীদেরও অজানা নয়। বর্তমান পাঠ্যসূচীতে এইটি পড়তে হয়।

প্রতিজ্ঞা—19 ঃ দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত তাদের অনুরূপ দুইটি বাহুর বর্গের অনুপাতের সমান।

সপ্তম-অষ্টম-নবম খণ্ড প্রধানত **সংখ্যাতত্ত্ব** নিয়ে আলোচনা। জ্যামিতির মধ্যে এই অংশ কিছুটা খাপছাড়া বলে মনে হয়। মনে হয়, ইউক্লিড প্রথা ও রীতি অনুবর্তন করেছেন মাত্র। কারণ, তাঁর আগে পীথাগোরীয় সম্প্রদায়, ইউডকসাস ইত্যাদি এ-বিষয়ে গবেষণা করেছিলেন। পঞ্চম-ষষ্ঠ খণ্ডে **মাত্রাতত্ত্ব** আলোচনার সম্ভবত পৃথকভাবে সংখ্যা তত্ত্বের আলোচনা অপরিহার্য বলে তাঁর মনে হতেও পারে। যাই হোক,—গণিতের ঐতিহাসিকদের মধ্যে এই তিন খণ্ডের বিষয়বস্তুর অন্তর্ভুক্তি সম্পর্কে বিতর্ক দেখা যায়।

এই তিনখণ্ডে অখণ্ডসংখ্যা ও অখণ্ডসংখ্যার অনুপাতের ধর্মাবলী নিয়ে আলোচনা আছে। এখানে সংখ্যা রেখাংশ হিসাবে ও দুইটি সংখ্যার গুণফল আয়তক্ষেত্র হিসাবে গণ্য করা হলেও ইউক্লিড সঠিক জ্যামিতিক পদ্ধতির ওপর নির্ভর করেননি। তবে প্রতীক-সঙ্কেতের ব্যবহার নেই,—সবই বাচনিক (**verbal**)।

সপ্তম খণ্ডে নানা ধরনের সংখ্যার সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে। যেমন,—**মৌলিক সংখ্যা, যৌগিক সংখ্যা, ঘনসংখ্যা, সম্পূর্ণ সংখ্যা** (**Perfect**) ইত্যাদি।

সংজ্ঞা—11 ঃ কেবলমাত্র একক দ্বারা পরিমাপ যোগ্য সংখ্যাই মৌলিক সংখ্যা।

সংজ্ঞা—13 ঃ অন্য কোন সংখ্যা (এক ব্যতীত) দ্বারা পরিমাপযোগ্য সংখ্যা যৌগিক সংখ্যা।

সংজ্ঞা—22 ঃ যে-সংখ্যা তার নিজ অংশ-এর (সমষ্টি) সমান, তার নাম সম্পূর্ণ সংখ্যা।

প্রথম ও দ্বিতীয় প্রতিজ্ঞায় ইউক্লিড দুই সংখ্যার গ. সা. গু. নির্ণয়ের পদ্ধতি বর্ণনা করেছেন। বর্তমান গ. সা. গু. নির্ণয়ের পদ্ধতি সবার জানা। কিন্তু

ইউক্লিড কেমনভাবে এই পদ্ধতিটি বর্ণনা করেছিলেন, কৌতূহল নিবারণের জন্য এখানে তুলে ধরা হলো।

যদি a ও b দুইটি অখণ্ড সংখ্যা হয় এবং a, b-এর চেয়ে বড় হয়, তা হলে a থেকে b এমনভাবে বিয়োগ কর যাতে b-এর চেয়ে ছোট c একটি সংখ্যা পাওয়া যায়। আবার b থেকে c এমনভাবে বিয়োগ কর যাতে c-এর চেয়ে ছোট সংখ্যা পাওয়া যায়। এবং এইভাবে পদ্ধতিটি চলতে থাকবে। যদি a ও b পরস্পর মৌলিক হয়, তা হলে ক্ষুদ্রতম অবশিষ্ট হিসাবে 1 পাওয়া যাবে। তা হলে 1-ই হবে গ. সা. গু.। কিন্তু a ও b পরস্পর মৌলিক না হলে, আমরা এমন একটি জায়গায় আসব যখন শেষ সংখ্যাটি দ্বারা ঠিক তার পূর্ববর্তী সংখ্যাটিকে পরিমাপ করা যাবে। তখন শেষ সংখ্যাটিই হবে গ. সা. গু.।

বর্তমানে এই পদ্ধতির নাম **Euclidean Algorithm**। সাধারণসূত্রের আকারে প্রকাশ করলে বলা যায়ঃ

যদি a ও b যে-কোন দুইটি অখণ্ড সংখ্যা হয়, এবং b যদি শূন্যের চেয়ে বড় হয়, তা হলে আমরা q অখণ্ড সংখ্যা নির্ণয় করতে পারব যাতে,

$a = b.q + r$, যখন r এই $O \leq r < b$ অসমতাকে সিদ্ধ করবে।

প্রতিজ্ঞা—**30** ঃ দুইটি সংখ্যার গুণফল কোন মৌলিক সংখ্যা দ্বারা পরিমাপ-যোগ্য হলে, ওই সংখ্যা মূল সংখ্যার একটিকেও পরিমাপ করবে।

প্রতিজ্ঞা—**31** ঃ যে-কোন যৌগিক সংখ্যা কোন মৌলিক সংখ্যা দ্বারা পরিমাপযোগ্য (বিভাজ্য)।

অষ্টম খণ্ডে গুণোত্তর শ্রেণীর আলোচনা সবিশেষ উল্লেখযোগ্য। অবশ্য গুণোত্তর শ্রেণী বলতে এখানে ইউক্লিড ক্রমিক সমানুপাতের কথা বলেছেন। যেমন,—

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} =$ ......ইত্যাদি ক্রমিক সমানুপাতে a, b, c, d, e ইত্যাদি পদগুলির যে-কোন দুইটি ক্রমিক পদের অনুপাত ধ্রুবক।

নবম খণ্ডে ক্রমিক সমানুপাত, বর্গ, ঘন ও কঠিন সংখ্যার তত্ত্ব আছে। এইখানে মৌলিক সংখ্যা সম্পর্কে ইউক্লিডের বিখ্যাত তত্ত্বটি দেখা যায়।

প্রতিজ্ঞা—**20** ঃ পূর্বনির্ধারিত যে-কোন সংখ্যক মৌলিক সংখ্যার চেয়ে মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা বেশী।

অর্থাৎ মৌলিক সংখ্যার সীমা আছে কি না বা বৃহত্তম মৌলিক সংখ্যা থাকতে পারে কিনা,—এ-বিষয়ে ইউক্লিডের গবেষণা আছে। এই গবেষণার ফল হচ্ছে মৌলিক সংখ্যা অসীম,—যদিও প্রথম দিকে বেশী এবং শেষের দিকে ক্রমশ কম।

তাঁর গবেষণায় বৈপরীত্যের সূত্র প্রয়োগ দেখা যায়। তিনি কি ভাবে 20নং প্রতিজ্ঞার সিদ্ধান্তে এলেন, তার সামান্য পরিচয় দেওয়া যাক।

'ধরা যাক,......একটি বৃহত্তম মৌলিক সংখ্যার অস্তিত্ব সম্ভবপর এবং ইহা হইতেছে **P**; তবে সহজেই প্রমাণ করা যাইবে যে [(১×২×৩×···**P**)+১)] সংখ্যাটি একই সঙ্গে মিশ্র ও মৌলিক সংখ্যা হইবে। ইহা মৌলিক সংখ্যা হইবে, কারণ **P** পর্যন্ত সর্বপ্রকার মৌলিক সংখ্যার দ্বারা ভাগ করিলেও প্রতিবারই ১ অবশিষ্ট থাকিবে। তারপর এই কল্পনা অনুযায়ী **P**-র উপর আর কোন মৌলিক সংখ্যা থাকা সম্ভব নয় এবং যেহেতু [(১×২×৩···**P**)+১] **P** হইতে বৃহত্তর, ইহা একটি মিশ্র সংখ্যা। এখন একই সংখ্যা যুগপৎ মৌলিক ও মিশ্র হইতে পারে না। অতএব বৃহত্তর মৌলিক সংখ্যার কল্পনা ভ্রান্ত।"[৬]

দশম খণ্ডে মোট 115টি প্রতিজ্ঞা আছে। কিন্তু ইউক্লিডের কোন কোন সংস্করণে আরো 2টি দেখতে পাওয়া যায়। এখানে তিনি অমেয় রাশি তথা অমূলদ রাশির শ্রেণীবিভাগ করেছেন। **De Morgan** এই খণ্ডের বিষয়বস্তু সম্পর্কে চমৎকার মন্তব্য করেছেন। তিনি বলেন, **"Euclid investigates evry possible variety of line which can be represented by $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ a and b representing two commensurable lines."**

একাদশ খণ্ডে ইউক্লিড পরিমিতি বা ঘন জ্যামিতি নিয়ে আলোচনা করেছেন। বস্তুত ঘন বস্তুর গুরুত্ব জ্যামিতিতে কম নয়। এই সম্পর্কে **Henry Poincare'** বলেন,—**"there were no solid bodies in nature there would be no geometry."**[৭] মোট 39টি প্রতিজ্ঞার আলোচনায় সমান্তরাল তল, সদৃশ ঘনবস্তু, ঘন বা কঠিন (**Solid angle**), পিরামিড, প্রিজম, চোঙ, ঘনক, সুষম অষ্টভুজ ইত্যাদি অন্তর্ভুক্ত হয়েছে।

সংজ্ঞা —1 ঃ যার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে তা-ই ঘন বস্তু।

সংজ্ঞা —2 ঃ ঘন বস্তুর প্রান্তদ্বয় হচ্ছে তল।

প্রতিজ্ঞা —20 ঃ তিনটি সামতলিক কোণ দ্বারা একটি ঘন কোণ উৎপন্ন হলে, যে-কোন দুইটি কোণের সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।

দ্বাদশ খণ্ডে আছে বিখ্যাত নিঃশেষীকরণ পদ্ধতির প্রয়োগ। ইউক্লিড কিভাবে এই পদ্ধতির প্রয়োগ করেছিলেন, সে-কথা আমরা ইতিপূর্বে ইউডকসাস সম্পর্কিত আলোচনায় উল্লেখ করেছি। এখানে মোট 18টি উপপাদ্য বা প্রতিজ্ঞা আছে। কিন্তু বেশীর ভাগ প্রতিজ্ঞা বক্ররেখা দ্বারা উৎপন্ন ক্ষেত্র, তল দ্বারা উৎপন্ন ক্ষেত্র

৬. বিজ্ঞানের ইতিহাস (প্রথম খণ্ড)—সমরেন্দ্রনাথ সেন, পৃ—206-7

৭. Science and Hypothsis—H. Poincare', Page—61

সম্পর্কিত। ইউডকসাস প্রসঙ্গে আমরা দু-একটির উল্লেখ করেছি ; এখানে আরো দু-একটির কথা বলা হলো।

প্রতিজ্ঞা— 10 ঃ যে-সব শঙ্কু ও চোঙ একই ভূমি ও উচ্চতা বিশিষ্ট, সে-ক্ষেত্রে শঙ্কুর ক্ষেত্রফল চোঙের এক-তৃতীয়াংশ হবে।

প্রতিজ্ঞা — 18 ঃ দুইটি গোলকের ক্ষেত্রফলের অনুপাত তাদের ব্যাসের ঘনর অনুপাতের সমান।

শেষ খণ্ডে সুষম বহুভুক্ত, বৃত্তে অন্তর্লিখিত বহুভুজের ধর্মাবলী আলোচিত হয়েছে। পাঁচটি সুষম ঘনবস্তু অন্তর্লিখনের বিখ্যাত সমস্যাও এখানে দেখা যায়, আর পাঁচটির বেশী বহুতলক নেই,—এর প্রমাণও এখানে দেখা যায়।

তেরো খণ্ডে বিভক্ত **এলিমেন্টস**। তাতে মোট **467**টি প্রতিজ্ঞা বা উপপাদ্যের প্রমাণ উপস্থাপন করেছেন ইউক্লিড। পুরোনো সংস্করণে আরো দুটি দেখতে পাওয়া যায়। কিন্তু এই দুটি ইউক্লিডের নয়,—প্রক্ষেপ,—পরে লেখা হয়েছে।

এলিমেণ্টস ছাড়াও ইউক্লিড গণিত বিষয়ে আরো গ্রন্থ রচনা করেছিলেন। কিন্তু সেগুলি কালের গ্রাস এড়াতে পারেনি। তা ছাড়া এলিমেণ্টস-এর মত জন-প্রিয়তা আর কোন গ্রন্থই অর্জন করতে পারেনি। তাঁর অন্যান্য গ্রন্থগুলির নাম **Data, Conics, Pseudaria, On Divisions, Porisms, Surface-Loci, Phaenomena**, ইত্যাদি। **Data**-য় এলিমেণ্টস-এর জ্যামিতিতে যে-সব বীজ-গাণিতিক সমস্যা আছে, তার আলোচনা আছে ; **Conics** নাকি চার খণ্ডে রচিত হয়েছিল। আর এই গ্রন্থের বিষয়বস্তু নিয়েই নাকি অ্যাপোলোনিয়াস তাঁর **Conic Sections**-এর প্রথম তিনটি খণ্ড রচনা করেন। এলিমেণ্টস-এর তুলনায় এ-সব গ্রন্থের খুব বেশী মূল্য নেই,—ঐতিহাসিক মূল্য ছাড়া।

এলিমেণ্টস-এর দোষ-গুণ বিচার

ইউক্লিডের এলিমেণ্টস যুগ যুগ ধরে মানুষকে গাণিতিক চিন্তনে উদ্বুদ্ধ করে আসছে। এই গ্রন্থ পাঠে যেমন গণিতের স্বরূপ ও প্রকৃতি সম্বন্ধে ধারণা করা যায়, তেমনি আবার প্রমাণ সম্পর্কে সুস্পষ্ট ধারণা এবং নৈয়ায়িক পদ্ধতিতে উপাপদ্যের উপস্থাপনা শিক্ষা করাও যায়। গণিত-গ্রন্থ রচনার আদর্শ হিসাবেও এর মূল্য অপরিসীম।

একথা সত্য, এলিমেণ্টসের প্রতিজ্ঞা বা বিষয়সমূহ ইউক্লিডের আবিষ্কার নয়। কিন্তু যেভাবে বিষয়বস্তুর উপস্থাপনা করা হয়েছে,—প্রথমে স্বীকার্য ও স্বতঃসিদ্ধের বিবৃতি, সংজ্ঞার ব্যাখ্যা এবং শেকলের আংটার মত একটি একটি করে প্রতিজ্ঞা-সমূহের সজ্জা, তা একান্ত ইউক্লিডের মৌলিক প্রতিভার পরিচয়। আর একটি জিনিস বিশেষভাবে লক্ষ করার বিষয় যে, সব প্রতিজ্ঞা **সহজ থেকে জটিল** এই ঊধ্বক্রমে সজ্জিত। অনেক প্রতিভাশালী মানুষের লেখায় শৃঙ্খলা ও স্পষ্টতা দেখা

যায় না। কিন্তু ইউক্লিডে তেমন কিছু নেই। ইউক্লিড যে প্রথম শ্রেণীর জন্মগত শিক্ষক ছিলেন, এটা যেন তারই পরিচয়। ছাত্রদের সুবিধা ও অসুবিধা সব কিছু তিনি এমন জানতেন ও বুঝতেন যে, এলিমেণ্টস-এর বিষয়বস্তুর উপস্থাপনায় পারদর্শিতা দেখাতে পেরেছিলেন।

মননশীল বিদ্বৎসমাজের উচ্চ প্রশংসা সত্ত্বেও এলিমেণ্টস-এর কিছু কিছু ত্রুটি আছে। একটি বস্তুর ওপর আর একটি বস্তুর উপস্থাপনার সাহায্যে প্রমাণ তাঁর প্রধান ত্রুটি বলে বিবেচনা করা হয়। সংজ্ঞা দেওয়ার ক্ষেত্রেও ত্রুটি আছে। তিনি এমন কিছু কিছু সংজ্ঞা দিয়েছেন যা অপ্রয়োজনীয়, আবার কিছু কিছু সংজ্ঞার খুবই প্রয়োজন ছিল ; কিন্তু তিনি দেননি। সমালোচকরা বলেন, বিন্দু, রেখা ও তলের কোন গাণিতিক তাৎপর্য নেই। সুতরাং এ-সব দেওয়ার কোন প্রয়োজন ছিল না।

এই গ্রন্থের অনেক প্রমাণে তিনি অনেক অলিখিত অনুমান প্রয়োগ করেছেন,—কিন্তু সেগুলির উল্লেখ কোথাও করেননি। যেমন,—ইউক্লিডের যুক্তির অবতারণা থেকে বোঝা যায় দুইটি রেখা ছেদ করলে তাদের সাধারণ বিন্দু না থাকতেও পারে। কিন্তু তিনি এই অনুমানের উল্লেখ কোথাও করেননি। তা ছাড়া তাঁর প্রমাণের মধ্যে ত্রুটি আছে কোথাও কোথাও। সাধারণভাবে প্রতিজ্ঞা বিবৃত করেও তিনি সাধারণ (**general**) প্রমাণ না দিয়ে বিশেষ প্রমাণও দিয়েছেন। তেরো খণ্ডে সমাপ্ত এলিমেণ্টস-এর সর্বত্র ঐক্য রক্ষা করাও সম্ভব হয়নি। কখনো কখনো পূর্ববর্তী খণ্ডের বিষয়বস্তু পরবর্তী খণ্ডে, আবার পরবর্তী খণ্ডের বিষয়বস্তু পূর্ববর্তী খণ্ডেও আলোচিত হয়েছে। এমন কি, একই সংজ্ঞা ও প্রতিজ্ঞার পুনরাবৃত্তিও দেখা যায়। যদিও আমরা এখানে তেরো খণ্ডের অতি সংক্ষিপ্ত বিবরণ দিয়েছি, এবং পুনরাবৃত্তি এড়িয়ে গেছি, তা হলেও কিছু কিছু অসংলগ্নতা চোখে পড়বে।

এলিমেণ্টস প্রশংসা ও সমালোচনা দুই-ই পেয়েছে এবং তা স্বাভাবিক। যেমন,—**Pierce** বলেছেন, এই গ্রন্থ "**riddled with fallacies.**" কিন্তু এর ত্রুটির চেয়ে গুণই বেশী। একজন বাঙালী বিজ্ঞান লেখক ইউক্লিড সম্বন্ধে বলেন,—"ইউক্লিড নিজেই একটি অনন্যসাধারণ ব্যক্তি, একটি **phenomeon**। জ্যামিতির সংকলন তার আগেও হয়েছে, হয়েছে সম্পাদনা। তবুও ইউক্লিডের প্রতিভায় পূর্বসূরীদের কাজ সংবদ্ধ, যুক্তি সমৃদ্ধ, বিজ্ঞানসম্মত অথচ রমণীয় ভঙ্গীতে সম্পাদিত হলো। তাঁর যুক্তি-বিচারের মনোহারিত্ব বিংশ শতাব্দীতেও প্রোজ্জ্বল।"[৮] সামান্য অতিশয়োক্তি হলেও এই কথার অনেকাংশ সত্য।

৮, ভাষা গণিত—সাধন দাশগুপ্ত, পৃ—120-121

নবম অধ্যায়

অ্যাপোলোনিয়াস

(আনুমানিক 262-190 খ্রীস্টপূর্বাব্দ)

'The discoveries of Archimedes and Apollonius, says M, Chasles, marked the most brilliant epoch of ancient geometry,'

F. Cajori.

গ্রীক গণিতের ইতিহাসে অ্যাপোলোনিয়াস এক মহৎ ব্যতিক্রম। ইউক্লিড ও আর্কিমিডিসের পূর্বসূরী ও উত্তর-সূরীর অভাব নেই; উত্তরসূরীরা তাঁদের আবিষ্কৃত তত্ত্ব ও তথ্যাদিতে আকৃষ্ট হয়ে গাণিতিক গবেষণায় প্রেরণা পেয়েছিলেন এবং সাধ্যমত সংস্কার ও উন্নতি করার প্রয়াস পেয়েছিলেন। এমন কি, গণিতে সবচেয়ে অনাগ্রহী রোমানদেরও আর্কিমিডিসের বৈজ্ঞানিক ও গাণিতিক প্রতিভার প্রতি শ্রদ্ধাবোধ ছিল। অ্যাপোলোনিয়াসের পূর্বসূরী থাকলেও তাঁর উত্তরসূরী ছিল না। তাঁর পূর্বসূরীদের মধ্যে মেনেকমাস, আরিস্টায়াস (**Aristaeus**), ইউক্লিড ও জ্ঞান-বৃদ্ধ আর্কিমিডিসের নাম সবিশেষ উল্লেখযোগ্য। সে-যুগের মানুষ তাঁর অনন্য সাধারণ প্রতিভা সম্বন্ধে বিন্দুমাত্র সন্দেহপরায়ণ ছিল না। সেইজন্য তারা অ্যাপোলোনিয়াসকে *"the Great Geometer"* আখ্যা দিতে কুণ্ঠাবোধ করেনি। তাঁর গাণিতিক প্রতিভার মূল্যায়ন সে সময়ে হলেও, তাঁর গবেষণা গণিতে যে নব দিগন্তের সূচনা করতে পারত, তা কিন্তু হয়নি। প্রকৃত উত্তরসূরীর অভাবে এই দুর্ভাগ্যজনক অবস্থা দীর্ঘদিন চলেছিল,—অন্তত রেনেশাঁ যুগের আগে পর্যন্ত তাঁর উত্তরসূরীর দেখা পাওয়া যায় না।

অ্যাপোলোনিয়াসের ব্যক্তিজীবন

বিশ্বের প্রাচীন বিজ্ঞানী ও ও গণিতজ্ঞদের ব্যক্তিজীবন সাধারণত অজ্ঞাত। আপোলোনিয়াসের ক্ষেত্রেও তার ব্যতিক্রম নেই। তবে এইটুকু জানা যায় যে, তিনি টলেমী ইউয়ারগেটিস-এর (Ptolemy Euergetes) রাজত্বকালে আনুমানিক 262 খ্রীস্টপূর্বাব্দে উত্তর-পশ্চিম এশিয়া মাইনরের উপকূলে পার্গা (Perga) নামক স্থানে জন্মগ্রহণ করেন। এবং সম্ভবত চতুর্থ টলেমী ফিলোপ্যাটর-এর (Philopator) রাজত্বকালে 190 খ্রীস্টপূর্বাব্দে তাঁর মৃত্যু হয়। কৈশোরে আলেকজান্দ্রিয়া বিশ্ব-বিদ্যালয়ে অধ্যয়ন করেন,—তাঁর গণিতের শিক্ষক ছিলেন ইউক্লিডের উত্তরসূরীরা। এবং কিছুদিন তিনি পার্গামাম-এ (Pergamum) পড়াশোনা করেও থাকবেন। এইখানেই গণিতের বিখ্যাত ঐতিহাসিক ইউডিমাস-এর সঙ্গে তাঁর পরিচয় হয়,

এবং তাঁর নামেই তিনি বিখ্যাত **কনিক সেকশন**-এর (Conic Section) প্রথম তিনখণ্ড উৎসর্গ করেন। ইউডিমাসের মৃত্যুর পর কনিক সেকশনের অন্য খণ্ডগুলি অ্যাটালাস (Attalus) নামে কোন এক গণিতজ্ঞের নিকট পাঠান। দ্বিতীয় খণ্ডের ভূমিকাটি সে-যুগের গ্রীকদের লেখার একটি বৈশিষ্ট্য হিসাবে গণ্য করা যায়। ইউডিমাসকে উদ্দেশ্য করে লেখাটি এরকম ঃ **"I have sent my son Apollonius to bring you (Eudemuss) the second book of my Conics. Read it carefully and communicate it to such others as are worthy of it. If Philonides, the geometer, whom I introduced to you at Ephesus, comes into the neighbourhood of Pergamum, give it to him also."**[১] আলেকজান্দ্রিয়ায় পড়তে এসে আর্কিমিডিসের মত স্বদেশে ফিরে যাননি। এখানেই স্থায়ীভাবে বসবাস করতে থাকেন,—গণিতের অধ্যাপনা ও গবেষণায় আত্মনিয়োগ করেন।

যদিও তাঁর প্রধান কীর্তি **কনিক সেকশন** বা **শঙ্কুচ্ছেদ**-এর ওপর, তবুও তিনি অন্যান্য বিষয়ে গ্রন্থাদি রচনাও করেন। প্যাপাসের মতে *On Contacts, Plane Loci, Inclinations, Section of an Area* এবং *Determinate Section* গ্রন্থগুলি অ্যাপোলোনিয়াসের রচনা।

কনিক সেকশন (Conic Sections)

প্রকৃতপক্ষে মেনেকমাস শঙ্কুচ্ছেদ-এর আবিষ্কারক, আর অ্যারিস্টায়াস ও ইউক্লিডও কনিক জ্যামিতি সম্পর্কে গ্রন্থ রচনা করেছিলেন। কিন্তু অ্যাপোলোনিয়াসের হাতে এই জ্যামিতির চরম বিকাশ ও পরিণতি ঘটে। ইউক্লিডের মত তিনি পূর্বসূরী ও সমসাময়িক গণিতজ্ঞদের সব গাণিতিক গবেষণা একত্র করে নৈয়ায়িক পদ্ধতিতে সংগঠিত করেন। কেবল তা-ই নয়,—এ-বিষয়ে তাঁর মৌলিক অবদান বিস্ময়ের উদ্রেক করে। তাঁর গ্রন্থটি শুধু বিশালই নয়, শঙ্কুচ্ছেদ সম্পর্কে তাঁর গবেষণা এমন উচ্চ পর্যায়ের যে, পরবর্তীকালের গণিতজ্ঞরা নূতন কিছু ভাববার মতন অবকাশ আর পাননি।

কনিক সেকশন অষ্ট খণ্ডে রচিত। এতে মোট 487টি প্রতিজ্ঞা আছে। প্রথম চারটি খণ্ড আদি গ্রীক ভাষায় পাওয়া যায়। কিন্তু পরের তিনটি আরবী ভাষায় পাওয়া যায়। আর অষ্টম খণ্ডটি চিরতরে অবলুপ্ত হয়ে গেছে বলে মনে করা হয়। সপ্তদশ শতাব্দীতে বিখ্যাত জ্যোতির্বিজ্ঞানী এডমণ্ড হ্যালী নানা সূত্র থেকে এই খণ্ডটি উদ্ধার করার প্রয়াস পান। এই অষ্টম খণ্ডটি প্রকৃত অ্যাপোলোনিয়াসের মৌলিকতা রক্ষা করতে পেরেছে কিনা, এ নিয়ে পাণ্ডিতদের মধ্যে বিতর্ক রয়েছে।

---

১. A History of Mathematics—F. Cajori, Page-46

হেরাক্লিডিস-এর (Heraclides) লেখা থেকে অ্যাপোলোনিয়াস সম্পর্কে একটি চাঞ্চল্যকর তথ্য জানা যায়। হেরাক্লিডিস নাকি এরূপ অভিযোগ করেছেন যে, অ্যাপোলোনিয়াস আর্কিমিডিসের অপ্রকাশিত আবিষ্কার আত্মসাৎ করেছেন। কিন্তু গণিতের ঐতিহাসিকরা একথা বিশ্বাস করেন না। কনিক সেকশনের প্রথম তিনটি বা চারটি খণ্ড অবশ্য পূর্ববর্তী গণিতজ্ঞের আবিষ্কারের ওপর প্রতিষ্ঠিত ; কিন্তু বাকী অংশ বা খণ্ডগুলির বিষয়বস্তু সম্পূর্ণ নতুন, এবং তা অ্যাপোলোনিয়াসের নিজস্ব অবদান বলে বিবেচিত হয়।

কনিক সেকশনের সংক্ষিপ্ত বিবরণ

সমতল দ্বারা লম্ব বৃত্তীয় শঙ্কুর নানা প্রকার **ছেদ**-কে (Section) কনিক সেকশন বা শঙ্কুচ্ছেদ বলে। ছেদক-সমতল শঙ্কুর ভূমির সমান্তরাল হলে যে-ছেদ হয়, তা একটি '**বৃত্ত**' হবে ; ছেদক-সমতল ভূমির সমান্তরাল না হয়ে তির্যক হলে এবং সব উৎপাদকরেখাকে ছেদ করলে, ছেদটি হবে '**উপবৃত্ত**' আর ছেদক-সমতল একটি এবং একটিমাত্র উৎপাদকরেখার সমান্তরাল হলে, ছেদটি একটি '**অধিবৃত্ত**' উৎপন্ন করবে। সব শেষে আর এক রকম হতে পারে। ছেদক-সমতল যদি শঙ্কুর অক্ষের **সমতল** হয়, তা হলে ছেদক-সমতল ওই শঙ্কু ও আর একটি বিপরীত শঙ্কুকে '**পরাবৃত্ত**'-এ ছেদ করবে। 'অধিবৃত্ত', 'উপবৃত্ত' ও 'পরাবৃত্ত' নিয়েই কনিক সেকশন বা শঙ্কুচ্ছেদ গড়ে উঠেছে।

কনিক সেকশনের পথিকৃৎ মেনেকমাস সমকোণী, সূক্ষ্মকোণী ও স্থূলকোণী এই তিন ধরনের শঙ্কুকে তার একটি বাহুর সমকোণে সমতল দ্বারা ছেদ করে তিন রকমের ছেদ পান। আর এরাই যথাক্রমে অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত ও পরাবৃত্ত। কিন্তু অ্যাপোলোনিয়াস সর্বপ্রথম এই তিন ধরনের কনিক একটিমাত্র বৃত্তীয় শঙ্কুর ওপর নির্ভর করে তাঁর তত্ত্বের ভিত্তি স্থাপন করেন,—এই শঙ্কু **লম্ব বৃত্তীয়** বা **তির্যক** হতে পারে। বস্তুত, এখানেই তাঁর সঙ্গে পূর্বসূরীদের পার্থক্য, এবং তাঁর বৈশিষ্ট্য বা বিশেষত্বও বটে।

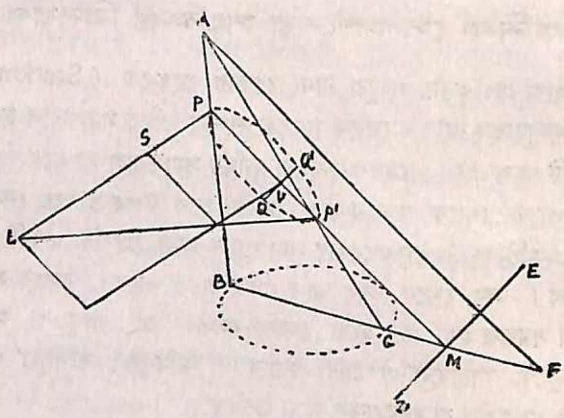
প্রথম খণ্ডে তিনি কনিকের সংজ্ঞা ও কয়েকটি প্রাথমিক ধর্ম নিয়ে আলোচনা করেছেন। প্রথম খণ্ডের ভূমিকায় তিনি বলেছেন, এই খণ্ড **"contains the mode of producing the three sections and the conjugate hyperbolas and their principal characteristics, more fully and generally worked out than in the writings of other authors."**[২]

অ্যাপোলোনিয়াস *Parabola* (অধিবৃত্ত), *Ellipse* (উপবৃত্ত) ও *Hyperbola* (পরাবৃত্ত) এই তিনটি জ্যামিতিক পরিভাষার স্রষ্টা। আর্কিমিডিসের

২. A History of Mathematics—F. Cajori, Page—46

গ্রন্থে প্রথম দুটি দেখতে পাওয়া যায়। কিন্তু গণিতের ঐতিহাসিকরা বলেন, এগুলি তাঁর উদ্ভাবিত নয়,—পরবর্তীকালে প্রক্ষিপ্ত হয়েছে। এইরূপ নামকরণের কারণ প্রসঙ্গে গণিতের এক প্রখ্যাত ঐতিহাসিক বলেন,—**"The word 'ellipse' was applied because $y^2 < px$, p being the parameter ; the word 'parabola' was introduced because $y^2 = px$, and the term 'byperbola' because $y^2 > px$."**[৩]

এবার চিত্রের সাহায্যে অ্যাপোলোনিয়াস আবিষ্কৃত কনিকের কয়েকটি মূল ধর্মের বর্ণনা দেওয়া যাক ঃ



চিত্র—17

চিত্রে **BC** বৃত্ত এবং **A** বৃত্তাস্থিত তলের বহিঃস্থ একটি বিন্দু। **A**-এর মধ্য দিয়ে একটি রেখাকে বৃত্তের পরিধির চতুর্দিকে ঘোরালে একটি দ্বৈত (**double**) শঙ্কু উৎপন্ন হবে। বলা বাহুল্য, বৃত্তটি হবে শঙ্কুর ভূমি। **A** থেকে বৃত্তের কেন্দ্রের ওপর অঙ্কিত সরলরেখাকে শঙ্কুর অক্ষ (**axis**) বলে (চিত্রে দেখানো হয়নি)। অক্ষটি ভূমির ওপর লম্ব হলে শঙ্কুটিকে লম্ব বৃত্তীয় শঙ্কু বলা হয়, আর তা না হলে তির্যক বা স্কেলেন।

কোন সমতল দ্বারা শঙ্কুচ্ছেদ ভূমির সমতলকে **DE** রেখায় ছেদ করল। ধরা যাক, বৃত্তীয় ভূমির ব্যাস **BC** এবং **BC⊥DE**। এখন **ABC** ত্রিভুজের মধ্যে শঙ্কুর অক্ষ অবস্থিত। **ABC** ত্রিভুজকে অক্ষীয় ত্রিভুজ (**axial triangle**) বলে। মনে করা যাক, এই ত্রিভুজ কনিককে **PP'**-এ ছেদ করল। **PP'M** ছেদিত সমতল ও অক্ষীয় ত্রিভুজের ছেদের জন্য উৎপন্ন হয়েছে। শঙ্কুচ্ছেদে **Q'Q** যে-কোন জ্যা এবং **Q'Q∥DE**। অ্যাপোলোনিয়াস দেখিয়েছেন যে, **PP'** কর্তৃক **Q'Q** সমদ্বিখণ্ডিত হয়েছে অর্থাৎ $VQ = \frac{1}{2} Q'Q$।

৩. A History of Mathematics—F. Cajori, Page—47

PM∥AF অঙ্কন করা হলো ; AF, BM-এর বর্ধিতাংশ F বিন্দুতে ছেদ করল। আবার, PL⊥PM অঙ্কন করা হলো। উপবৃত্ত ও পরাবৃত্তের জন্য L-কে এমনভাবে নির্বাচন করা হলো যাতে এই শর্তটি পূরণ হয় ঃ

$$\frac{PL}{PP'}=\frac{BF.FC}{AF^2}$$

আর অধিবৃত্তের জন্য L-এর নির্বাচন এমনভাবে হলো যাতে এই শর্তটি পূরণ হয় ঃ

$$\frac{PL}{PA}=\frac{BC^2}{BA.AC}$$

উপবৃত্ত ও পরাবৃত্তের জন্য P'L অঙ্কন করা হলো। V থেকে PL∥VR অঙ্কন করা হলো, এবং PL-কে R বিন্দুতে ছেদ করল। আরো কয়েকটি ছোটখাট অঙ্কনের পর অ্যাপোলোনিয়াস উপবৃত্ত ও পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে প্রমাণ করেছেন,—

$$QV^2=PV.VR\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

অ্যাপোলোনিয়াস QV-কে কোটি (Ordinate) বলে সূচিত করেছেন এবং তাঁর মতে কোটির বর্গ (PV.VR) আয়তক্ষেত্রের সমান। অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে তিনি দেখিয়েছেন,—

$$QV^2=PV.PL\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

গ্রীকদের জ্যামিতি সত্যসত্যই গর্বের বিষয় ছিল। কিন্তু পাটীগণিত ও বীজগণিত সম্বন্ধে একথা বলা যায় না। সেই খ্রীস্টপূর্ব তৃতীয় শতাব্দীতে বীজগণিতের উন্নতি তো হয়ওনি। পরে অবশ্য ডায়োফ্যাণ্টাসের হাতে এর শ্রীবৃদ্ধি ঘটে। যাই হোক, অ্যাপোলোনিয়াসের কনিক সেকশনে কনিক ধর্মের বীজগাণিতিক প্রয়োগ নেই। তিনি PV-কে ভুজ ও QV-কে কোটি বা অর্ধজ্যা (Semichord) বলেছেন। তাঁর (1) ও (2) সূত্র দুইটিকে আধুনিক বীজগণিতের ভাষায় প্রকাশ করা যায়।

ধরা যাক, $PL=2p$, $PP'=d$, $PV=x$ এবং $QV=y$,

তা হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ,—

$$y^2=2px$$

উপবৃত্তের সমীকরণ,—

$$y^2=PV.VR\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

কিন্তু $PV.VR = x(2p - LS)$; LR আয়তক্ষেত্র ও $PL.PP'$ আয়তক্ষেত্র পরস্পর সদৃশ ; সুতরাং

$$\frac{LS}{PL} = \frac{x}{d}$$

$$\text{বা, } \quad LS = \frac{2px}{d}$$

(3) নং সমীকরণ থেকে,

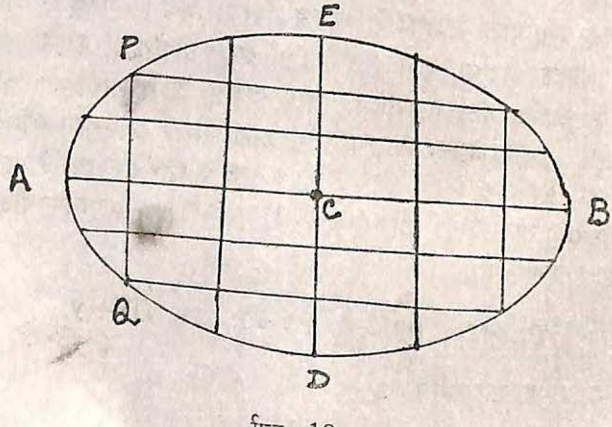
$$y^2 = x\left(2p - \frac{2px}{d}\right) = 2px - \frac{2px^2}{d}$$

পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে ওপরের সমীকরণটিতে ঋণাত্মক চিহ্নের পরিবর্তে ধনাত্মক চিহ্ন হবে। সমীকরণটি এরূপ ঃ

$$y^2 = 2px + \frac{2px^2}{d}$$

অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে অ্যাপোলোনিয়াসের অঙ্কনে d অনির্দিষ্ট বা অসীম (infinite)। সুতরাং দেখা যাচ্ছে, উপবৃত্ত ও পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে অধিবৃত্ত যেন সীমান্ত (limiting) রচনা করছে অর্থাৎ অধিবৃত্ত হচ্ছে উপবৃত্ত ও পরাবৃত্তের সীমিত রূপ।

অ্যাপোলোনিয়াসের কৃতিত্ব ও অবদান উপলব্ধি করতে হলে আরো কয়েকটি সংজ্ঞা বিষয়ক ধারণার উল্লেখ করতে হয়। কারণ, আধুনিক গণিতে এখনো তাদের মূল্য ও গুরুত্ব হ্রাস পায়নি।



চিত্র—18

চিত্রে উপবৃত্তের মধ্যে একপ্রস্থ সমান্তরাল জ্যা PQ-এর সমান্তরাল। অ্যাপোলোনিয়াস দেখিয়েছেন, এই জ্যাগুলির কেন্দ্রসমূহ AB-এর ওপর অবস্থিত।

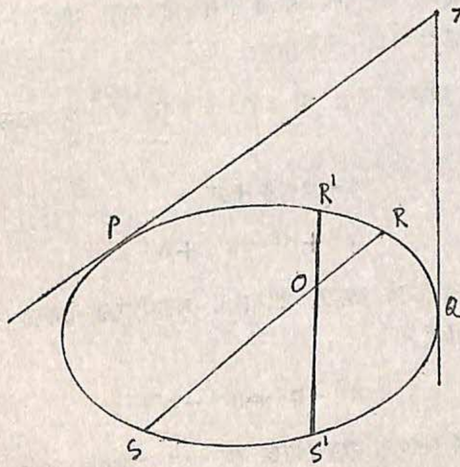
তিনি আরো প্রমাণ করে দেখিয়েছেন, AB-এর মধ্যবিন্দু C-এর মধ্য দিয়ে যদি মূল সমান্তরাল জ্যায়ের সমান্তরাল DE অঙ্কন করা যায়, তা হলে এই রেখা AB-এর সমান্তরাল সব রেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে। অর্থাৎ গাণিতিক ভাষায় DE, AB-এর অনুবন্ধী (Conjugate) ব্যাস।

প্রথম খণ্ডে কনিকের স্পর্শক সম্বন্ধে আলোচনাও দেখা যায়। তিনি স্পর্শককে এমন একটি রেখা হিসাবে গণ্য করেছেন যার ও কনিকের মধ্য একটি সাধারণ বিন্দু (Common point) আছে, কিন্তু তা কনিকের বাইরে অবস্থিত। প্রদত্ত কয়েকটি তথ্যের ভিত্তিতে কিভাবে কনিক অঙ্কন করা যায় সে-বিষয়ে আলোচনাও দেখা যায়। এইসব তথ্য হলো ব্যাস, নাভিলম্ব (latus rectum) এবং ব্যাসের সহিত কোটির নতিকোণ (inclination)।

দ্বিতীয় খণ্ডে প্রধানত অসীমপথ (asymptote), অক্ষ ও ব্যাস সম্পর্কীয় আলোচনা আছে। শুরুতে অসীমপথ-এর অঙ্কন ও ধর্মাদি দেখা যায়। অ্যাপোলোনিয়াস কেবলমাত্র অসীমপথের অস্তিত্ব সম্পর্কেই অবহিত ছিলেন না, পরাবৃত্তের ওপর কোন বিন্দু ও অসীমপথের মধ্যে দূরত্বের ক্ষুদ্রতা সম্পর্কে মন্তব্য সবিশেষ উল্লেখযোগ্য। অনুবন্ধী পরাবৃত্ত আবিষ্কার তাঁর আর একটি অবদান।

অধিবৃত্তের নাভি-র (focus) উল্লেখ তিনি করেননি সত্য, কিন্তু উপবৃত্ত ও পরাবৃত্তের নাভির উল্লেখ করেছেন। অবশ্য কনিকের অতি প্রয়োজনীয় ও অপরিহার্য ধর্ম নিয়ামক (directrix) সম্বন্ধে কোন ধারণা পাওয়া যায় না।

ব্যাস ও স্পর্শক কর্তৃক সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল দিয়ে তৃতীয় খণ্ডের শুরু। তাঁর ক্ষেত্রফল নির্ণয় বিষয়ক একটি উপপাদ্যের আলোচনা করা হলো :



চিত্র—19

চিত্রে TP এবং TQ কনিকের দুইটি স্পর্শক। এখন, যে-কোন জ্যা RS ও

R'S' যথাক্রমে **TP** ও **TQ**-এর সমান্তরাল হলে, এবং **RS** ও **R'S' O** বিন্দুতে ছেদ করলে, অ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য থেকে জানা যায়,—

$$\frac{RO.OS}{R'O.OS'}=\frac{TP^2}{TQ^2}$$

পোল ও পোলার (**Pole** ও **Poler**) নিয়ে আলোচনা আছে চতুর্থ খণ্ডে। একটি প্রতিজ্ঞায় কেমন করে বহিঃস্থ বিন্দু থেকে কনিকের ওপর দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়, তা নিয়ে আলোচনা আছে। বিভিন্ন অবস্থানে কতবার কনিক ছেদ হতে পারে এই আলোচনার শেষে অ্যাপোলোনিয়াস প্রমাণ করেছেন দুইটি কনিক চারটির বেশী বিন্দুতে ছেদ করতে পারে না।

কনিকের **অভিলম্ব** (**normal**) সম্বন্ধেও আলোচনা আছে, আর আছে কিভাবে প্রদত্ত বিন্দু থেকে কনিকের ভেতরে বা বাইরে এর ওপর অভিলম্ব অঙ্কন করা যায়। পঞ্চম খণ্ডে কেবল অভিলম্ব সম্পর্কিত বিষয়ই নয়, **চরম** (**maxima**) ও **অবম** (**minima**)-এর জটিল বিষয়টি নিয়েও সবিস্তার আলোচনা দেখা যায়। এখানে কনিকের ওপর প্রদত্ত কোন বিন্দু থেকে দীর্ঘতম ও হ্রস্বতম রেখা অঙ্কনের সমস্যা আলোচিত হয়েছে। এই খণ্ডটিতে অ্যাপোলোনিয়াসের মৌলিকতা অধিক মাত্রায় দেখা যায় বলে গণিতের ঐতিহাসিকরা স্বীকার করেন।

ষষ্ঠখণ্ডে সর্বসম ও সদৃশ কনিক ও কনিকের ছিন্নাংশ (**segments of conics**) সম্পর্কে আলোচনা দেখা যায়। কনিকের ছিন্নাংশ হচ্ছে বৃত্তাংশের মত জ্যা দ্বারা খণ্ডিত অংশ।

সপ্তম খণ্ডকে মূলত **অনুবন্ধী ব্যাস** সম্পর্কীয় বলা যায়। অনুবন্ধী ব্যাসের ধর্ম ও অক্ষের ধর্ম প্রসঙ্গে তিনি বলেন,—

(1) **a** ও **b** অক্ষদ্বয় এবং **a'** ও **b'** উপবৃত্ত বা পরাবৃত্তের অনুবন্ধী ব্যাস হলে,

$$a+b<a'+b'$$

(2) $$a^2+b^2=a'^2+b'^2$$

2নং সূত্রটি উপবৃত্তের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য, পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে ধনাত্মক চিহ্নের পরিবর্তে ঋণাত্মক চিহ্ন হবে ;

$$a^2-b^2=a'^2-b'^2$$

অষ্টম খণ্ডটি যে অবলুপ্ত হয়ে গেছে, সে-কথা আগেই বলা হয়েছে। তবুও এডমণ্ড হ্যালী কর্তৃক উদ্ধারপ্রাপ্ত এই অংশটিতে অনুবন্ধী ব্যাস সম্পর্কীয় আলোচনা দেখা যায়।

একটি বিখ্যাত সমস্যা!

অ্যাপোলোনিয়াসের **কনিক সেকশন** ছাড়াও অন্যান্য গ্রন্থের উল্লেখ করা হয়েছে। তার মধ্যে *On contacts* গ্রন্থটির বিষয়বস্তু পুনর্গঠিত করেন বিখ্যাত ইটালীয় গণিতজ্ঞ ভিয়েটা (Vieta)। এতে অ্যাপোলোনিয়াসের একটি বিখ্যাত সমস্যা আছেঃ তিনটি নির্দিষ্ট বৃত্ত দেওয়া আছে ; **এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা প্রদত্ত তিনটি বৃত্তকে স্পর্শ করবে।** অবশ্য এই সমস্যাটি আরো জটিল আকারেও দেখা যায়। স্বয়ং ভিয়েটা, নিউটন ও অন্যান্য বহু গণিতজ্ঞ এই সমস্যায় আকৃষ্ট হয়ে সমাধান করেছিলেন। এখানে যে-সমস্যাটি তুলে ধরা হয়েছে তার সমাধান আট রকমভাবে হতে পারে।

অ্যাপোলোনিয়াসের বিলুপ্ত গ্রন্থের অংশ উদ্ধার করতে বহু গণিতজ্ঞ যেমন, ভিয়েটা (Vieta), স্নেলিয়াস (Snellius), অ্যাণ্ডারসন (Anderson), ফের্মা (Fermat), লসন (Lawson) প্রমুখ যে বিস্ময়কর অধ্যয়ন করেছেন, তার ফলে বিশ্লেষণী জ্যামিতি (Analytical Geometry) আবিষ্কার ত্বরান্বিত হয়েছে এবং আধুনিক গণিতের সমৃদ্ধিও ঘটেছে।[৪]

গবেষণা, আবিষ্কার ও কর্মধারার প্রকৃতির দিক থেকে বিচার করলে ইউক্লিড ও অ্যাপোলোনিয়াস প্রকৃতপক্ষে ক্লাসিক্যাল গ্রীক যুগের,—আলেকজান্দ্রিয় যুগের নন। কিন্তু ক্রমপঞ্জী, অধ্যাপনা ও গবেষণা স্থানের কথা বিবেচনা করলে তাঁরা আলেকজান্দ্রিয় যুগে পড়েন। গণিতের ইতিহাসে ক্লাসিক্যাল যুগকে গ্রীক গণিতের স্বর্ণযুগ বলা যায়। এই যুগের গণিতচর্চা প্রায় আধুনিক যুগের মত। এই যুগের গণিতজ্ঞরা অবরোহী পদ্ধতির ওপর জোর দিয়েছেন, বিমূর্ত চিন্তনে স্ফূর্তিলাভ করেছেন। তাঁদের স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্য নির্বাচন ও প্রয়োগ-নৈপুণ্য রীতিমত বিস্ময়ের। বস্তুত এই যুগে মানুষকে জ্ঞান-বিজ্ঞানে প্রাগ্রসর হওয়ার পথ দেখিয়েছেন এ-যুগের গণিতজ্ঞরা। দ্বান্দ্বিক বিকাশের দিক থেকে দেখলে বলতে হয়, "গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হলো যে, এইসব অগ্রগামী পদক্ষেপে কয়েকটি প্রতিষ্ঠিত নিয়মকে খণ্ডন করা হয়েছিল এবং পরে ঐ নিয়মগুলি এমনভাবে বদলে নেওয়া হলো যাতে পূর্বোক্ত খণ্ডনের খণ্ডন হয়।[৫]

---

৪. The Treasury of Mathematics, Vol-I, Page—363

৫. বিজ্ঞান ও মার্কসীয় দর্শন—জে. বি. এম. হ্যালডেন, পৃ—৩৩

দশম অধ্যায়

আর্কিমিডিস

(287-212 খ্রীস্টপূর্বাব্দ)

To Archimedes once came a youth intent upon knowledge :
Said he "Initiate me into the Science divine,
Which to our country has borne glorious fruits in abundance,
And which the walls of the town 'gainst the Sambuca protects".
"Callst thou the Science divine? It is so, the wise man responded,
But so it was, my son, ere the state by her service was blest.
Would'st thou have fruit of her only ? Mortals with that can provide thee,
He who the goddess would woo, seek not the woman in her".

Schiller.*



আর্কিমিডিস

প্রাচীন বিজ্ঞানসাধকদের মধ্যে আর্কিমিডিসের নাম সর্বাধিক পরিচিত। তাঁর উদ্‌স্থিতি ও বলবিদ্যা বিষয়ক নীতি ও সূত্রগুলি এমনই প্রাথমিক ও প্রয়োজনীয়

* আমাদের দৃষ্টিতে গণিত—প্রদীপকুমার মজুমদার, পৃ—94

যে, স্কুলের বিজ্ঞান গ্রন্থেও স্থান পেয়েছে। কপিকল, লিভার প্রভৃতি বিষয়ে তাঁর আবিষ্কার এবং আপেক্ষিক গুরুত্ব নির্ণয়ে গবেষণা কিংবদন্তীতে পরিণত হয়েছে। ইউক্লিড জ্যামিতিতে সর্বকালের মানদণ্ড স্থির করে থাকলে, আর্কিমিডিসও বিজ্ঞান ও গণিতে সর্বকালের মানদণ্ড স্থির করে মানবজাতির অশেষ কল্যাণসাধন করে গেছেন,—একথা মোটেই অত্যুক্তি নয়।

বিজ্ঞানে যত কৃতিত্বই থাকুক না কেন, তাঁর মৌলিক গাণিতিক গবেষণা অন্য সব-কিছুকে ম্লান করে দেয়। গণিতের দুইটি শাখা, বিশুদ্ধ ও ফলিত গণিতে তাঁর প্রায় সমান অবদান। তাঁর নিঃশেষীকরণ পদ্ধতিতে ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয়, π-এর মান নির্ণয় এবং বৃহৎ বৃহৎ সংখ্যা প্রকাশের নতুন পদ্ধতি সত্যই বিস্ময়কর। বস্তুত, গণিতের নানা সমস্যা সমাধানে তাঁর বিশেষ পদ্ধতি ও প্রণালী আবিষ্কার একান্তভাবেই মৌলিক ও আধুনিক। সেইজন্য গণিতের ঐতিহাসিক ও মনস্বী গণিতজ্ঞরা বলেন, বিশ্বগণিতে তিনজন শ্রেষ্ঠ গণিতজ্ঞের নাম করতে হলে প্রথমে আর্কিমিডিসের নাম করতে হয়। অপর দু-জন হলেন আইজ্যাক নিউটন ও কার্ল ফেডারিক গাউস। প্রাচীনকালের এই অসাধারণ প্রতিভাসম্পন্ন গণিতজ্ঞের প্রতি যথাবিহিত সম্মান ও শ্রদ্ধা জানানোর জন্য যথার্থই বলা হয় তিনি *"The Homer of Geometry"*.

বহুবিদ্যায় পারদর্শী হওয়া অসম্ভব, অল্প বিদ্যার অনুশীলনের মাধ্যমে বিশেষ জ্ঞানার্জন সম্ভব। প্রাচীনকালের চেয়ে আধুনিক যুগে এই সত্যটি আরো স্পষ্ট হয়ে উঠেছে। এই যুগে গণিতের প্রায় শতাধিক শাখা ; শুধু গণিতেই বিশেষজ্ঞ হওয়া এক রকম অসম্ভব। এই সত্যটি সেই খ্রীস্টপূর্ব তৃতীয় শতাব্দীতে অনন্য মনীষা সম্পন্ন আর্কিমিডিস সম্পূর্ণ উপলব্ধি করেছিলেন বলেই যে অল্প কয়েকটি বিদ্যার অনুশীলনে নিজেকে নিযুক্ত করেছিলেন, তাতে সম্পূর্ণ সাফল্য অর্জন করেছিলেন। প্রকৃতপক্ষে, তত্ত্বীয় ও প্রযুক্তি জ্ঞানের এমন সুষ্ঠু সমন্বয় কদাচিৎ দেখা যায়,—প্রাচীনকালে তো নয়-ই। হলডেন আইনস্টাইন সম্পর্কে যে কথা বলেছেন, তা সম্পূর্ণভাবে আর্কিমিডিসের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।*

ইতিহাস-কিংবদন্তী পুরুষ আর্কিমিডিস

আর্কিমিডিসের ব্যক্তিজীবন সম্বন্ধে বিশেষ কিছু জানা যায় না। প্লুটার্ক প্রসঙ্গক্রমে তাঁর মৃত্যুর বিবরণ দিয়েছেন বটে, কিন্তু তা সঠিক ও অভ্রান্ত বলে মনে না করার অনেক হেতু আছে। কারণ, প্লুটার্ক তথ্যনিষ্ঠ জীবনীকার অপেক্ষা সফল গল্পকার। সে যাই হোক, তাঁর বিবরণ থেকে জানা যায়, 212 খ্রীস্টপূর্বাব্দে পঁচাত্তর বছর বয়সে রোমান সৈন্যদের হাতে আর্কিমিডিসের মৃত্যু হয়। সুতরাং তিনি 287 খ্রীস্টপূর্বাব্দে জন্মগ্রহণ করেন। স্থানটি সিসিলির অন্তর্গত সিরাকুজ

* বিজ্ঞান ও মার্কসীয় দর্শন, পৃ—৩৯

(**Syracuse**)। তাঁর পিতা ছিলেন জ্যোতির্বিদ, নাম **ফিডিয়াস**। আর্কিমিডিস অভিজাত পরিবারে জন্মগ্রহণ করেছিলেন কিনা, তা নিয়ে বিতর্ক আছে। তবে সিরাকুজের রাজা হীরনের সঙ্গে তাঁর ঘনিষ্ঠ সম্প্রীতি ও সদ্ভাব ছিল, এবং হীরনের অনুরোধে রোমানদের হাত থেকে সিরাকুজকে বাঁচানোর জন্য তাঁর গাণিতিক ও বৈজ্ঞানিক প্রতিভা কাজে লাগিয়েছিলেন। রাজা হীরনের সঙ্গে এমন কি তাঁর পুত্রের সঙ্গেও তাঁর সম্পর্কের কথা বিবেচনা করলে মনে হয় তিনি সম্ভবত অভিজাত পরিবারেই জন্মগ্রহণ করে থাকবেন।

বিখ্যাত আলেকজান্দ্রিয়া বিশ্ববিদ্যালয়ে আর্কিমিডিস অধ্যয়ন করেন,—খুব বেশীদিন নয়, অল্পকাল। এখানে দু-জন বিখ্যাত গণিতজ্ঞের সাথে তাঁর আজীবন বন্ধুত্ব গড়ে ওঠে। গণিতজ্ঞ **কোনন** (**Conon**) ছিলেন প্রকৃতই প্রতিভাশালী। **কোনন**-এর গাণিতিক প্রতিভা ও মননশীলতার প্রতি আর্কিমিডিসের গভীর শ্রদ্ধা ও আস্থা ছিল। কিন্তু দুর্ভাগ্যের বিষয়, এই গণিতজ্ঞের প্রতিভার মূল্যায়ন করার মত কোন তথ্যাদি আমাদের হাতে নেই,—সবই অবলুপ্ত হয়ে গেছে। আর একজন ছিলেন ইরাটোস্থেনিস (**Eratosthenes**)। কোননের মৃত্যুর পর তিনি **ডোসিথিয়াস**-এর (**Dositheus**) সঙ্গে পত্রালাপ করতে থাকেন। ডোসিথিয়াস ছিলেন কোননের ছাত্র। অ্যাপোলোনিয়াস যেমন আলেকজান্দ্রিয়ায় পড়াশোনা করতে এসে এখানেই থেকে যান, অধ্যাপনা ও গবেষণায় জীবন অতিবাহিত করেন, আর্কিমিডিস কিন্তু তা করেননি। অধ্যয়ন সমাপনান্তে স্বদেশে ফিরে গেছেন, নিজস্ব ভঙ্গীতে গবেষণা করেছেন এবং তাঁর পূর্বতন শিক্ষায়তনের বিশিষ্ট বন্ধুদের সঙ্গে যোগাযোগ রক্ষা করে চলেছেন। এইভাবে তিনি নতুন তত্ত্ব ও তথ্যাদির সঙ্গে পরিচিত হতেন, এবং গবেষণার ক্ষেত্র নির্বাচন করতেন।

মননশীল ও চিন্তাশীল ব্যক্তিমাত্রেই সাধারণত কিছুটা অন্যমনস্ক ও উদাসীন প্রকৃতির হন। বিশ্বের বিখ্যাত দার্শনিক, বিজ্ঞানী ও গণিতজ্ঞদের জীবন আলোচনায় এমন অনেক কাহিনী জানতে পারা যায়। যেমন,—থ্যালেস পথ চলার সময় রাস্তার দিকে তাকিয়ে চলার পরিবর্তে আকাশের দিকে তাকিয়ে চলতেন, আর হোঁচোট খেয়ে পড়ে যেতেন ; নিউটন ডিমের পরিবর্তে ঘড়ি সিদ্ধ করতেন ; আর প্যারিস ভ্রমণকালে আইনস্টাইনের হোটেলের রুম-নম্বর ভুলে যাওয়ার ঘটনা প্রায় সর্বজনবিদিত। আর্কিমিডিসের জীবনেও এমন দু-একটি ঘটনা দেখতে পাওয়া যায়।

একবার রাজা হীরন একটি সোনার মুকুটের খাদ নির্ণয়ের ভার দিয়েছিলেন আর্কিমিডিসের ওপর। আমরা অবশ্য জানিনা, স্বর্ণকার সত্যকার খাদ মিশিয়েছিল কিনা। তবে রাজা হীরন নাকি সন্দেহ করেছিলেন। মুকুটটি না ভেঙে কিভাবে খাদ নির্ণয় করা যায়, এই সমস্যা নিয়ে আর্কিমিডিস ভাবছিলেন। একদিন স্নান করার সময় চৌবাচ্চার জল উপচে পড়ার ঘটনা থেকে যে এই সমস্যার সমাধান-সূত্র

পেয়েছিলেন,—এ-ঘটনা সবার জানা। বস্তুত, ঘটনাটি অতি তুচ্ছ, কিন্তু এই ঘটনার পারম্পর্য ছিল সুদূরপ্রসারী। সাধারণভাবে এমন মনে করা হয়, স্বর্ণ-মুকুটের খাদ নির্ণয় সমস্যার সমাধান হওয়াতেই তিনি উল্লসিত ও উত্তেজিত হয়ে বিবস্ত্র হয়ে প্রকাশ্য দিবালোকে "**ইউরেকা, ইউরেকা**" বলে ছুটেছিলেন। কিন্তু আমাদের ঠিক এরূপ মনে হয় না। এই ঘটনা থেকে একটি সুন্দর বৈজ্ঞানিক সূত্র আবিষ্কারের ইঙ্গিত পাওয়াতেই তিনি উল্লসিত হয়ে থাকবেন, এবং সেইটাই তাঁর প্রকৃত "**পেয়েছি পেয়েছি**"। এক ঘটনা আর এক ঘটনার উদ্ঘাটন করে,—অচিন্ত্যনীয় কোন বিষয়ের আভাস-ইঙ্গিতও দেয়। এক্ষেত্রে এই রকমই কিছু হয়ে থাকবে।

তখনকার দিনে গ্রীকরা স্নানের পর অলিভ তেল মাখত। আর্কিমিডিস তেল মাখার সময় গায়ে তেলের ওপর যে নানা রেখা ফুটে উঠত, তার অপূর্ব জ্যামিতিক চিত্রে মুগ্ধ হতেন। ঘণ্টার পর ঘণ্টা আগুনের ধারে খালি গায়ে বসে অলিভ তেল অঙ্কিত রেখাগুলির কোন জ্যামিতিক সমস্যা সমাধানে বাহ্যজ্ঞানশূন্য হয়ে পড়তেন। জ্যামিতি শাস্ত্রের হোমার এমনি করেই তাঁর ইলিয়াড-ওডেসি রচনা করতেন।

ইতিপূর্বে আমরা প্লুটার্কে'র নাম উল্লেখ করেছি। তিনি আর্কিমিডিসের মৃত্যুর দৃশ্য বর্ণনা করেছেন। কিন্তু সে-ঘটনা বলার আগে ওই সময়কার ঐতিহাসিক পটভূমি সম্বন্ধে সামান্য ধারণা গড়ে তোলা যাক।

"খ্রীঃ পূঃ ২১২ সাল। সিসিলি দ্বীপের অধিকার-প্রশ্ন নিয়ে রোম ও কার্থেজের মধ্যে যে প্রচণ্ড দ্বন্দ্ব শুরু হয়েছিল, তার প্রথম পর্ব শেষ হয়েছে। কার্থেজের কয়েকটি বাণিজ্য-উপনিবেশ ছাড়াও এই দ্বীপে ছিল বহু গ্রীক বসতি। তাদের মধ্যে প্রধান হ'ল সিরাকিউজ, আর্কিমিডিসের বাসস্থান ও কর্মস্থল। ক্রমশঃ-বিস্তারশীল রোমান সাম্রাজ্য যখন ইতালির দক্ষিণাংশ এবং সিসিলি দ্বীপের দ্বার-প্রান্তে এসে উপস্থিত হয়, তখন স্থানীয় গ্রীকরা এপিরাসের রাজা পিরাস্-এর নেতৃত্বে সম্মিলিত হয়ে রোমের বিরুদ্ধে যুদ্ধ করেছিল, কিন্তু জিততে পারেনি। তারপর প্রথম পিউনিক (যুদ্ধে) সমগ্র সিসিলি রোম্যান সাম্রাজ্যের অন্তর্ভুক্ত হয়ে যায়। সিরাকিউজকেও নতুন প্রভুশক্তির কাছে বশ্যতা স্বীকার করতে হয়।

দ্বিতীয় পিউনিক যুদ্ধ যখন শুরু হ'ল, তখন সিরাকিউজের স্বাধীনতা-স্পৃহা আবার জাগ্রত হয়ে উঠল। হিয়েরনের মৃত্যু ও তাঁর পুত্র গেলনের হত্যার পর সিরাকিউজ আপনাকে স্বাধীন রাষ্ট্র বলে ঘোষণা করল। কার্থেজের সেনাপতি বীর হ্যানিবলের অপূর্ব সাফল্যে আশা হয়েছিল বুঝি বা রোমের রাষ্ট্রশক্তি একেবারে ধূলিস্যাৎ হবে। কিন্তু রোমান কন্সাল মার্সেলস এলেন সিরাকিউজকে দমন করবার জন্য। শহরের দরজা বন্ধ করে দেওয়া হ'ল। মার্সেলস বাইরে থেকে নৌশক্তির সাহায্যে সিরাকিউজ অবরোধ করলেন। কিন্তু আর্কিমিডিস তখন জীবিত। বৃদ্ধ বৈজ্ঞানিকের উদ্ভাবিত যন্ত্র-আবিষ্কার মার্সেলস এবং রোমান

বাহিনীকে উদ্ভ্রান্ত ও বিপর্যস্ত করে তুলল। অনেকদিন অবরোধের পর রোমান সৈন্যদল অবশেষে প্রাচীর উল্লঙ্ঘন করে শহরে প্রবেশ করল।"[১]

তারপর রোমান সৈন্যরা অবাধে লুণ্ঠন, হত্যালীলা ও অগ্নিদাহ করে যখন আর্কিমিডিসের কাছে পৌঁছল, তখন তিনি গভীর জ্যামিতিক গবেষণায় মগ্ন ; বালির ওপর জ্যামিতিক চিত্র এঁকে বাহ্যজ্ঞানশূন্য হয়ে বসে আছেন। এমন সময় এক রোমান সৈন্য চ্যালেঞ্জ জানাল। কিন্তু তা তাঁর কানে গেল না। বরং তিনি বলে উঠলেন, "আমার বৃত্তকে নষ্ট করোনা"। উদ্ধত সৈন্যের তরবারির কোপ নেমে এলো, বিশ্ববাসী এক মহান প্রতিভা হারাল।

প্লুটার্ক তথ্যনিষ্ঠ নন, তাঁর বিবরণে গল্পাংশ বেশী হতে পারে। কিন্তু আর্কিমিডিস সম্পর্কে তাঁর দু-একটি কথা সত্যই প্রশংসনীয়। তাঁর মন্তব্য ঃ (Archimedes) "possessed so high a spirit, so profound a soul, and such a treasure of scientific knowledge that, though these inventions had obtained for him the renown of more than human sagacity, he yet would not deign to leave behind him any written work on such subjects, but, regarding as ignoble and sordid the business of mechanics and every sort of art which directed to use and profit, he placed his whole ambition in those speculations, in whose beauty and subtlety there is no admixture of the common needs for life."

বলবিদ্যা ব্যতিরেকে অন্যান্য বিষয়ের ওপর গ্রন্থাদিও তিনি রচনা করেছিলেন। তবে গ্রন্থাদির কোনটাই বৃহৎ আকারের নয়, সবই ছোট ছোট পুস্তিকাকারে। তাঁর রচিত কয়েকটি পুস্তিকার নাম ঃ

1. *Quadrature of the Parabola*
2. *On the Sphere and Cylinder*
3. *Measurement of a Circle*
4. *On Sphere-making*
5. *The Sand-reckoner*
6. *On Levers*
7. *On the Equilibrium of Planes*
8. *On Centres of Gravity*
9. *On the Floating Bodies*
10. *On Conoids and Spheroids*

---

১. বিজ্ঞানী আর্কিমিডিস—বিমলাপ্রসাদ মুখোপাধ্যায়, কিশোর জ্ঞান-বিজ্ঞান (শারদ) 1982

গণিতে অবদান

গণিতে আর্কিমিডিসের তুলনা নিউটন-গাউস। বলা যায়, সমগ্র গ্রীক গণিতের বিশাল উত্তরাধিকার তিলে তিলে গড়া ঐশ্বর্য নিয়ে এক দেহে লীন হয়েছে। আর্কিমিডিস সর্বগ্রাসী প্রতিভা নিয়ে এ-সব যেমন স্বীকরণ করেছেন, তেমনি আবার নতুন পদ্ধতি ও সূত্র উদ্ভাবন করে আধুনিক গাণিতিক চিন্তাধারার পরিচয়ও দিয়েছেনঃ পূর্বসূরীদের অস্পষ্ট চিন্তাধারা সুস্পষ্ট করেছেন, নানান পদ্ধতির সংস্কার করেছেন ; এমন কি প্লেটোর রুলার-কম্পাস নিয়ম বা নির্দেশ ভঙ্গ করতেও দ্বিধা করেননি। গণিতে স্বয়ম্ভূ তত্ত্ব বা আবিষ্কার দেখা যায় না বললেই চলে। যেমন, নিউটন ও লিবনিজকে কলন গণিতের আবিষ্কারক বলা হলেও তাঁরা কিন্তু এই গণিতের আবিষ্কারক নন। বহু যুগ ধরে যে ধারণা, প্রত্যয়াদি প্রচলিত ছিল, সে-সবের সুষ্ঠু ব্যাখ্যা দিয়ে একটি সুস্পষ্ট নীতি গড়ে তুলতে এই দু-জন গণিতজ্ঞ মুখ্য ভূমিকা পালন করেছেন বলা যায়। আর্কিমিডিসের গাণিতিক প্রতিভায় এই জিনিসটি লক্ষ্য করা যায়। তিনি অভিনব, পূর্বাপর অজ্ঞাত এমন কোন স্বয়ম্ভূ তত্ত্ব আবিষ্কার করেননি। যা প্রচলিত ছিল তার সংস্কার, উন্নতি ও সূক্ষ্ম পদ্ধতি প্রয়োগ করে গণিতের সমৃদ্ধি ঘটিয়েছেন।

গ্রীক সংখ্যা-লিখন পদ্ধতি খুবই জটিল ছিল। ক্লাসিক্যাল যুগের গণিতজ্ঞরা এ-বিষয়ে সম্পূর্ণ উদাসীন ছিলেন। বস্তুত পাটীগণিতের সংখ্যাতত্ত্বের প্রতি আকর্ষণ ছাড়া সংখ্যা-লিখন ও গণনার প্রতি গ্রীকদের আগ্রহ ছিল না। প্লেটো তো গণনাবিদ্যাকে **vulgar** ও **childish** বলে মনে করতেন। কিন্তু আর্কিমিডিস প্লেটোর অনুশাসন থেকে মুক্ত হবার প্রয়াস পেয়েছিলেন। সংখ্যা-লিখনে তাঁর অবদান অতি সংক্ষেপে আলোচনার আগে গ্রীক সভ্যতার একেবারে গোড়ার দিকের সংখ্যা-লিখন সম্বন্ধে সামান্য জেনে নিতে হয়।

গ্রীকসভ্যতার আদি পর্বে আর্কাইক (**archaic**) সংখ্যার প্রচলন ছিল। ক্রীট দ্বীপে এই সংখ্যার নমুনা পাওয়া গেছে। খ্রীস্টপূর্ব 500 শতাব্দীর পর গ্রীকরা অ্যাটিক পদ্ধতি (attic system) ব্যবহার করতে থাকে। এই পদ্ধতিতে উল্লম্বরেখার সাহায্যে 1 থেকে 4 পর্যন্ত সংখ্যা সূচিত হতো। তারপর $\Gamma=5$, $\Delta=10$, $H=100$, $X=1000$ এবং $M=10{,}000$ এইভাবে লেখা হতো। আর এদের মিলিয়ে-মিশিয়ে অন্তবর্তী সংখ্যা লেখা হতো। এখানে দু-একটি সংখ্যা লেখার উদাহরণ দেওয়া হলোঃ

$$\Gamma| = 6\ ;\ \Gamma\Delta = 50\ ;\ \Delta\,\Gamma||| = 18$$

তারপর গ্রীকরা বর্ণমালার এক একটি বর্ণকে সংখ্যা হিসাবে সূচিত করতে থাকে। একে আয়োনীয় বা আলেকজান্দ্রিয় পদ্ধতি বলা হয়। কিন্তু কেন গ্রীকরা এরকম পদ্ধতি ব্যবহার করতে শুরু করল, তার কারণ জানা যায় না। যাই হোক, এই পদ্ধতিতেও সমস্যা ছিল, বিশেষ করে বড় বড় সংখ্যা-গঠনে। এখন আমরা

যেমন 10-এর ওপর যে-কোন সংখ্যক শূন্যের সংখ্যা ঘাত বা সূচক (**power**) হিসাবে ব্যবহার করে যত বড় খুশী সংখ্যা লিখতে পারি, গ্রীকপদ্ধতিতে তা সম্ভব ছিল না। গ্রীকরা জ্যামিতিতে কতদূর উন্নতি করেছিল, সে-সম্বন্ধে একটু ধারণা আমাদের হয়েছে। আমাদের মনে হয়, সংখ্যার এই জটিলতার জন্যই তারা জ্যামিতি চর্চার দিকে মন দিয়েছিল অথবা জ্যামিতির প্রতি প্লেটো প্রভৃতির অত্যধিক গুরুত্ব আরোপ করায় তারা সংখ্যা-লিখনের উন্নতিসাধনে মনোনিবেশ করেনি। আসলে গণনা, হিসাব-নিকাশ তাদের কাছে মর্যাদা পায়নি,—ক্রীতদাসদের সামিল ছিল। এই মনোবৃত্তি, প্রবণতার ফল ভাল হয়নি,—পাটীগণিত ও বীজ-গণিতে গ্রীকদের অবদান নেই বললেই চলে। অবশ্য পাশ্চাত্য অভিমানীরা স্বীকার করবেন কিনা সন্দেহ।

আর্কিমিডিস তাঁর **Sand-reckoner** পুস্তিকায় বড় বড় সংখ্যা প্রকাশের পরিকল্পনা করেছিলেন। গ্রীক গণিতের সবচেয়ে বড় সংখ্যা মিরিয়াডের মিরিয়াড (**a myriad myriads**) থেকে শুরু করে তাঁর পদ্ধতিটি দেখিয়ে-ছিলেন। যেমন,—

$$10^8 \times 10^8 = 10^{16} \text{ ; } 10^8 \times 10^{16} = 10^{24} \text{ ইত্যাদি।}$$

এইভাবে হিসাব করে তিনি বললেন, দশ হাজার মিলিয়ন স্টাডিয়া* ব্যাসের গোলকে বালুকণার সংখ্যা $= 10^{63}$! রাজা হীরনের পুত্র গেলনকে একটি পত্রে লেখেন :

"কেহ কেহ মনে করেন, বালুকণারা অগণিত ও অসংখ্য। এই বালুকণার দ্বারা আমি শুধু সাইরাকিউজ ও সিসিলির বালুর কথাই মনে করিতেছি তাহা নহে, পৃথিবীর অন্তর্গত যত বালুর অস্তিত্ব সম্ভবপর, সব বালুর কথাই বলিতেছি। আবার কেহ কেহ এই বালুকণারা অগণিত এইরূপ মনে না করিয়া বলেন যে, এমন কোন সংখ্যার নির্দেশ এ পর্যন্ত হয় নাই যা (উপরিউক্ত) সমগ্র বালুকণার সংখ্যাকে অতিক্রম করিতে পারে।......কিন্তু আপনাকে আমি সহজবোধ্য জ্যামিতিক প্রমাণের সাহায্যে দেখাইব যে, জিউক্সিপ্পাসের নিকট প্রেরিত আমার এক গবেষণায় যেসব সংখ্যার কথা উল্লেখ করিয়াছি, তাহারা পৃথিবীর কেন সমগ্র ব্রহ্মাণ্ডকে বালুরাশির দ্বারা ভরাট করিতে হইলেও যেরূপ বৃহৎসংখ্যক বালুকণার প্রয়োজন, সেই সংখ্যা অপেক্ষা বৃহত্তর......অ্যারিস্টার্কাস স্থির নক্ষত্র পর্যন্ত সীমা নির্দিষ্ট করিয়া ব্রহ্মাণ্ডের যে আয়তন নিরূপণ করিয়াছেন, এইরূপ বৃহৎ আয়তনের বালুময় গোলকের বালু-কণার সংখ্যা হইতেও **Principles**-এ উল্লিখিত আমার সংখ্যারা অনেক বড়।"[২]

উপরোক্ত ধারণার গাণিতিক রূপ দিতে গিয়ে তিনি চারটি স্বীকার্যের সাহায্য

---

* 10 স্টাডিয়া = 1 মাইল

২. বিজ্ঞানের ইতিহাস, প্রথম খণ্ড,—সমরেন্দ্রনাথ সেন, পৃ—213 ;
The Works of Archimedes, T. L. Heath, Page—221-222

গ্রহণ করেছেন। এইসব স্বীকার্যের সবগুলি তৎকালে গণিতে প্রচলিত ছিলনা, —তাঁর নিজস্ব সংস্কার ও সংযোজনও ছিল।

প্রথম স্বীকার্য ঃ পৃথিবীর পরিসীমা প্রায় 3,000,000 স্টাডিয়া এবং তার চেয়ে বৃহত্তর নয়।

এই স্বীকার্য সম্বন্ধে বলতে গিয়ে আর্কিমিডিস মন্তব্য করেছেন সে-সময় অধিকাংশ জ্যোতির্বিজ্ঞানীদের নিকট 3,000,00 স্টাডিয়া ছিল পৃথিবীর পরিসীমা। কিন্তু তিনি পূর্বসূরীদের নির্ণীত পরিসীমা দশগুণ বৃদ্ধি করেছেন।

দ্বিতীয় স্বীকার্য ঃ পৃথিবীর ব্যাস চন্দ্রের ব্যাস অপেক্ষা বৃহত্তর, এবং সূর্যের ব্যাস পৃথিবীর ব্যাস অপেক্ষা বৃহত্তর।

তৃতীয় স্বীকার্য ঃ সূর্যের ব্যাস চন্দ্রের ব্যাস অপেক্ষা প্রায় 30 গুণ বড়, এবং তার চেয়ে বড় নয়।

ইউডকসাস ও আর্কিমিডিসের পিতা ফিডিয়াস বলেছিলেন যে, সূর্যের ব্যাস চন্দ্রের ব্যাসের যথাক্রমে 9 গুণ ও 12 গুণ; অ্যারিসটার্কাস বলেছিলেন 18 গুণের চেয়ে বড়, কিন্তু 20 গুণের চেয়ে ছোট।

চতুর্থ স্বীকার্য ঃ বিশ্বব্রহ্মাণ্ডরূপী বৃহৎ গোলকের বৃহৎ বৃত্তের ভেতরে অঙ্কিত সুষম সহস্রভুজের (**Chiliagon**) একটি বাহু অপেক্ষা সূর্যের ব্যাস বৃহত্তর।

এটি প্রকৃতপক্ষে স্বীকার্য নয়। কারণ, এটি পরে প্রমাণ করেছেন আর্কিমিডিস। সুতরাং একে উপপাদ্য বলাই সঙ্গত মনে হয়। পরীক্ষার সাহায্যে তিনি দেখিয়েছেন যে, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু চোখে ও অপর দুই বিন্দু সূর্যের ব্যাসের দুই প্রান্ত বিন্দুতে হলে সেখানে সূর্যের দ্বারা সৃষ্ট কোন সমকোণের $\frac{1}{164}$ অংশের ছোট ও $\frac{1}{200}$ অংশের বড়।

কেবল বৃহৎ সংখ্যা-গঠনের দিক থেকে বিচার করলে আর্কিমিডিসের বৃহৎ সংখ্যা-গঠনে অবশ্যই কৃতিত্ব আছে। গণিতজ্ঞ ও জ্যোতির্বিজ্ঞানীদের কাছে এর মূল্য বিবেচিত হবে বলে তিনি আশাও ব্যক্ত করেছেন *Sand-reckoner*-এর উপসংহারে। কিন্তু তিনি ঠিক কিরূপ আশা পোষণ করতেন, তা ব্যক্ত করেননি স্পষ্ট করে। এই বৃহৎ সংখ্যা গঠনের যে গুরুত্ব ও তাৎপর্য তাঁর পরিকল্পনায় পরিলক্ষিত হয়, তা হলো এর সাহায্যে অনির্দিষ্ট মানের সংখ্যা-গঠন করা যায়। আর্কিমিডিস দেখান, $10^8, 10^{16}, 10^{24}, 10^{32}$ প্রভৃতি সংখ্যা যে গুণোত্তর শ্রেণী উৎপন্ন করে তার পরপর যে-কোন দুটি সংখ্যার গুণফল পরবর্তী সংখ্যার সমান। অর্থাৎ $10^8 \times 10^{16} = 10^{24}$। সংখ্যাতত্ত্বের এই গবেষণা থেকে **'সূচক নিয়ম'** জানা যায়। কারণ, আমরা জানি,—

m ও **n** দুটি অখণ্ড ধনরাশি হলে,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

এই নিয়মের মধ্যে 'লগারিদম'-এর ধারণা বীজাকারে নিহিত ছিল বলে গণিতের ঐতিহাসিকরা অনুমান করেন।

একটি গাণিতিক তত্ত্ব

$A_1, A_2, A_3, \cdots A_m, \cdots A_n, \cdots A_{m+n-1}$ যদি ক্রমিক সমানুপাতিক শ্রেণীতে যে-কোন সংখ্যক পদ হয় যার $A_1=1$, $A_2=10$ (যাতে $1, 10^1, 10^2, 10^3, \cdots 10^{m-1}, \cdots 10^{n-1}, \cdots 10^{m+n-2}, \cdots$ গুণোত্তর প্রগতি গঠন করে) যদি যে-কোন দুটি পদ A_m, A_n গুণ করা হয়, তা হলে গুণফল ($A_m . A_n$) ওই শ্রেণীর একটি পদ হবে ; এবং তা A_m, A_1 থেকে যতদূরে, A_n থেকেও ততদূরে হবে। তা ছাড়া A_1 থেকে A_m ও A_n যত সংখ্যক পদ দূরে তাদের সমষ্টির চেয়ে ওই পদ (অর্থাৎ $A_m . A_n$) A_1 থেকে তত সংখ্যক পদ থেকে একক কম দূরত্বে অবস্থিত হবে।

সেই পদটির কথা ধরা যাক যা A_1 থেকে A_m যতসংখ্যক পদ দূরে, A_n থেকেও ওই পদ ঠিক ততসংখক পদ দূরে। ওই পদ সংখ্যা m বলে সূচিত করা যাক যার মধ্যে প্রথম ও শেষ পদ অন্তর্ভুক্ত। সুতরাং A_n থেকে m সংখ্যক পদ দূরে যে পদটি, তা A_{m+n-1}।

সুতরাং আমাদের প্রমাণ করতে হবে,

$$A_m . A_n = A_{m+n-1}$$

এখন, ক্রমিক সমানুপাতীতে যে-সব পদ অন্য পদ থেকে সমদূরে, তারা পরস্পর সমানুপাতী।

$$\text{অতএব, } \frac{A_m}{A_1} = \frac{A_{m+n-1}}{A_n}$$

$$\text{কিন্তু } A_m = A_m . A_1, \text{ যেহেতু } A_1 = 1$$

$$\text{অতএব, } A_{m+n-1} = A_m . A_n \cdots\cdots (1)$$

দ্বিতীয় প্রমাণ এখন স্পষ্ট যে, A_m, A_1 থেকে m সংখ্যক পদ দূরে, A_n, A_1 থেকে n সংখ্যক পদ দূরে, আর A_{m+n-1}, A_1 থেকে $(m+n-1)$ সংখ্যক পদ দূরে।

বর্গমূল নির্ণয়

গ্রীকদের বর্গমূল নির্ণয়ের পদ্ধতি অজানা ছিল না,—আর্কিমিডিসেরও ছিল না। কিন্তু দুঃখের বিষয়, আর্কিমিডিস কিভাবে বর্গমূল নির্ণয় করতেন, তা অজ্ঞাত। তবে আর্কিমিডিসের রচনায় নানা সংখ্যার বর্গমূল দেখা যায়,—অন্তত

আসন্ন মানে। *Measurement of a Circle* পুস্তিকায় নিম্নলিখিত বৃহৎ সংখ্যার বর্গমূল দেখা যায় ঃ

(1) $3013\frac{3}{4} > \sqrt{9082321}$

(2) $1838\frac{9}{11} > \sqrt{3380929}$

(3) $1009\frac{1}{6} > \sqrt{1018405}$

(4) $2017\frac{1}{4} > \sqrt{4069284\frac{1}{36}}$

(5) $591\frac{1}{8} < \sqrt{349450}$

(6) $1172\frac{1}{8} < \sqrt{1373943\frac{33}{64}}$

(7) $2339\frac{1}{4} < \sqrt{5472132\frac{1}{16}}$

প্রচলিত পদ্ধতিতে বর্গমূল করতে গেলে মূল সংখ্যার দুটি অংশ পাওয়া যায়,— একটি পূর্ণসংখ্যা, আর একটি ভাগশেষ। আমরা উদাহরণস্বরূপ যদি 349450 সংখ্যাটি নিই, তা হলে এর বর্গমূল করলে দুটি অংশ পাওয়া যায় ঃ

$$\sqrt{349450} = 591^2 + 169$$

এবার, আর্কিমিডিস $a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}$ এই সূত্রের দ্বিতীয় অংশ প্রয়োগ করেছেন,—

$$591 + \frac{169}{2.591} > \sqrt{349450} > 591 + \frac{169}{2.591 + 1}$$

যেহেতু, $169 = 13^2$ এবং $2.591 + 1 = 7.13^2$,

সুতরাং, $\sqrt{349450} = 591\frac{1}{7}$

কিন্তু আর্কিমিডিস এই মান গ্রহণ করেননি,— $\frac{1}{7}$ এর পরিবর্তে $\frac{1}{8}$ গ্রহণ করেছেন। অথচ, তাঁর রচনায় $\frac{1}{8}$ গ্রহণ করার কারণ উল্লিখিত হয়নি। অবশ্য গণিতের ঐতিহাসিকরা এর সম্ভাব্য কারণ দেবার প্রয়াস পেয়েছেন। যেমন, কেউ কেউ বলেন, গণনার সুবিধার জন্য আর্কিমিডিস ভগ্নাংশের মান $\frac{1}{2^n}$ আকারে রাখার পক্ষপাতী ছিলেন, যদিও তিনি জানতেন এতে ভ্রান্তি থেকে যাচ্ছে। এই প্রসঙ্গে হীথের মন্তব্য উদ্ধৃত হলো ঃ "Hence we must suppose that Archimedes had satisfied himself, by taking $591\frac{1}{7}$ and proceeding on that basis for some distance, that he would not be introducing any appreciable error in taking the more convenient though less accurate approximation $591\frac{1}{8}$."[২]

২. The Works of Archimedes—T. L. Heath, Page—LXXXVIII

$\sqrt{3}$-এর মান নির্ণয়

সামোসের অ্যারিসটার্কাস $\sqrt{2}$-এর মান দেন, কিন্তু তা ছিল স্থূল মান। কিন্তু তাঁর উত্তরসূরী আর্কিমিডিস $\sqrt{3}$-এর মান নির্ণয়ে কোন পদ্ধতির উল্লেখ না করে মান দেন $\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$। আর্কিমিডিস পদ্ধতি সম্পর্কে কিছু না বললেও আমাদের কৌতূহল নিবৃত্ত হবার নয়। গণিতের ঐতিহাসিকরা এই কাজে এগিয়ে এসেছেন। এই প্রসঙ্গে **Hultsch**-এর নাম উল্লেখযোগ্য। তিনি গ্রীক জ্যামিতি-কারদের 'বিশ্লেষণ' (***Analysis***) গ্রহণ করে সম্ভাব্য পদ্ধতি বর্ণনা করার প্রয়াস পেয়েছেন। আমরা হীথ-এর গ্রন্থ থেকে তাঁর পদ্ধতি তুলে ধরলাম।

$\frac{265}{153}$ ও $\frac{1351}{780}$—এই দুটি ভগ্নাংশ তুলনা করা যাক। এই দুটি ভগ্নাংশের হর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করলে হয়,

$$780 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 13$$
$$153 = 3 \times 3 \times 17$$

লক্ষ্য করার বিষয় যে, $2 \times 2 \times 13 = 52$, এবং $3 \times 17 = 51$; এখন, এই পর্যবেক্ষণ থেকে 780 ও 153—এই দুটি সংখ্যার সম্পর্ক দেখা যায়,—

$$780 = 3 \times 5 \times 52$$
$$153 = 3 \times 51$$

তুলনার সুবিধার জন্য $\frac{265}{153}$-এর লব ও হরকে 5 দিয়ে গুণ করা হলো। তা হলে মূল ভগ্নাংশ দুটি দাঁড়ায়,

$$\frac{1351}{15.52} \text{ এবং } \frac{1325}{15.51}$$

এখন, আর্কিমিডিসের অনুমানকে এই আকারে প্রকাশ করলে,

$$\frac{1351}{52} > 15\sqrt{3} > \frac{1325}{51} \ldots\ldots(1)$$

(1) নং আবার নিম্নরূপের তুল্য,—

$$26 - \frac{1}{52} > 15\sqrt{3} > 26 - \frac{1}{51}$$

এখন, $$26 - \frac{1}{52} = \sqrt{26^2 - 1 + \left(\frac{1}{52}\right)^2}$$

এবং, $$26 - \frac{1}{51} \text{ আসন্নকরণে } \sqrt{26^2 - 1}$$

সুতরাং আমরা পাই, $26-\frac{1}{52}>\sqrt{26^2-1}$

কিন্তু $26-\frac{1}{52}$-কে $15\sqrt{3}$-এর সহিত তুলনা করা হয়েছে, অথচ আমরা চাই $\sqrt{3}$-এর আসন্নকরণ। অতএব, 15 দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{1}{15}\left(26-\frac{1}{52}\right)>\frac{1}{15}\sqrt{26^2-1}$$

কিন্তু $$\frac{1}{15}\sqrt{26^2-1}=\sqrt{\frac{676-1}{225}}=\sqrt{\frac{675}{225}}=\sqrt{3}$$

অতএব, $$\frac{1}{15}\left(26-\frac{1}{52}\right)\not<\sqrt{3}$$

$\sqrt{3}$-এর নিম্নসীমা $\sqrt{3}>\frac{1}{15}\left(26-\frac{1}{52}\right)$,

লক্ষ্য করলে এরূপ মনে হওয়া বিচিত্র নয় যে, এই সিদ্ধান্তে আসা হয় 52-এর পরিবর্তে (52 − 1) বসিয়ে।

আর্কিমিডিসের সময় বীজগণিতের উন্নতি কিছু হয়নি বললেই হয়। সুতরাং তখন **অনির্ণেয় সমীকরণ** (**Indeterminate Equation**) সমাধানের কোন উপায় ছিল না। পরে অবশ্য ডায়োফ্যাণ্টাস এ-ধরনের সমীকরণ নিয়ে আলোচনা করেছেন। কিন্তু এ-বিষয়ে তাঁর কৃতিত্ব আর্যভট, ব্রহ্মগুপ্ত, ভাস্করাচার্য প্রমুখের মত তেমন উল্লেখযোগ্য নয়।[৩] যাই হোক, আর্কিমিডিস অসামান্য প্রতিভাবলে অনির্ণেয় সমীকরণ ঘটিত একটি সমস্যা সমাধান করেন। এইটি বিখ্যাত **গোবাদি সমস্যা** (***Cattle Problem***) নামে প্রচলিত।

প্রাচীনকালে অবশ্য যে-কোন জটিল সমস্যাকেই আর্কিমিডিসের নামে চালিয়ে দেওয়া হতো। তখন এরকম সমস্যার নাম হতো ***problema bovinum*** বা ***problema Archimedis.*** সমস্যার আকার-প্রকার দেখে অনেকে মনে করেন এই সমস্যাটি তাঁর নয়। কারণ, বিখ্যাত ইরাটোস্থেনিসের নামে যেটি উৎসর্গীত, তা এরকম হতে পারে না। সমস্যাটি আবার কবিতার আকারেও পাওয়া যায়।

আমরা এই প্রবন্ধে সমস্যা, আর্কিমিডিস প্রদত্ত উত্তর ও একটি সম্ভাব্য পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করব।

সমস্যা

সূর্যদেবতার সাদা, কালো, ছাবকা (spotted) ও বাদামী রঙের গবাদি পশু ছিল। বাদামী রঙের ষাঁড়ের সংখ্যা সাদা ষাঁড় থেকে কালো ষাঁড়ের $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$

৩. প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিবৃত্ত, নন্দলাল মাইতি, পৃ—২১৩-২২৪

গুণ বাদ দিলে যা থাকে, অথবা কালো ষাঁড়ের সংখ্যা থেকে ছাবকা ষাঁড়ের ($\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$) গুণের অন্তর, অথবা ছাবকা ষাঁড় থেকে সাদা ষাঁড়ের ($\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$) গুণ বাদ দিলে যা থাকে তা-ই। আবার সাদা গাভীর সংখ্যা হবে কালো ষাঁড় ও গাভীর মোট সংখ্যার ($\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$) গুণ ; কালো গাভীর সংখ্যা হবে ছাবকা ষাঁড় ও গাভীর মোট সংখ্যার ($\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$) গুণ ; ছাবকা গাভীর সংখ্যা হবে বাদামী ষাঁড় ও গাভীর মোট সংখ্যার ($\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$) গুণ ; এবং বাদামী গাভীর সংখ্যা সাদা ষাঁড় ও গাভীর মোট সংখ্যার ($\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$) গুণ।

গোপালে বিভিন্ন রঙের ষাঁড় ও গাভীর সংখ্যা কত ?

বলা বাহুল্য, সমস্যাটি জটিল। কিন্তু আর্কিমিডিস এই সমস্যার সমাধান করেছিলেন। তাঁর পদ্ধতিটি আমাদের জানা নেই, তবে উত্তর এরকম ঃ

রঙ	ষাঁড়	গাভী
সাদা	829, 318, 560	576, 528, 800
কালো	596, 841, 120	389, 459, 680
বাদামী	331, 950, 960	435, 137, 040
ছাবকা	448, 644, 800	281, 265, 600

আমরা আগেই বলেছি যে, আর্কিমিডিস কিভাবে এই সংখ্যাগুলি অর্থাৎ উত্তর পেলেন, তা আমাদের জানা নেই। তাই আমরা এখানে একটি পদ্ধতি বর্ণনা করার চেষ্টা করছি।

ধরা যাক, সাদা, কালো, ছাবকা ও বাদামী ষাঁড়ের সংখ্যা যথাক্রমে **X, Y, Z** ও **T** এবং অনুরূপ রঙের গাভীর সংখ্যা **x, y, z** ও **t** ; এখন সমস্যার শর্ত থেকে এই সাতটি সমীকরণ পাওয়া যায় ঃ

(1) $X-T=\frac{5}{6}Y$; (2) $Y-T=\frac{9}{20}Z$;

(3) $Z-T=\frac{13}{42}X$; (4) $x=\frac{7}{12}(Y+y)$;

(5) $y=\frac{9}{20}(Z+z)$; (6) $z=\frac{11}{30}(T+t)$;

(7) $t=\frac{13}{42}(X+x)$.

এখন, (1), (2) ও (3)নং সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,—

$$6X+5Y=6T \ ; \quad 20Y-9Z=20T \ ;$$

$$42Z-13X=42T.$$

X, Y ও **Z**-কে কেবল অজ্ঞাতরাশি হিসাবে ধরলে,—

$$X=\frac{742}{297}\cdot T, \ Y=\frac{178}{99}\ T, \ Z=\frac{1580}{891}\cdot T$$

এখন, 1580 ও 891-এর মধ্যে কোন সাধারণ উৎপাদক না থাকায় **T** কোন অখণ্ড সংখ্যার গুণিতক।

ধরা যাক, $T=891G$; তাহলে, $X=2226G$; $Y=1602G$; $Z=1580G$; $T=891G$. I

এবার, (4), (5), (6) ও (7)নং সমীকরণে **X, Y, Z** ও **T**-এর মান বসিয়ে পাওয়া যায় :

$$12x-7y=11214G, \qquad 20y-9z=14220G,$$
$$30z-11t=9801G, \qquad 42t-13x=28938G.$$

আগের মত **x, y, z** ও **t**-কে অজ্ঞাত রাশি ধরলে,—

$$cx=7206360G, \qquad cy=4893246G$$
$$cz=3515820G, \qquad ct=5439213G \quad \text{...II}$$

এখানে c একটি মৌলিক সংখ্যা : 4657 ;

যেহেতু **G**-এর কোন সহগকেই **c** দ্বারা ভাগ করা যায় না, সুতরাং **G, c**-এর কোন অখণ্ড সংখ্যার গুণিতক :

$$G=cg$$

এবার **I** ও **II**-এ **G**-এর মান বসালে,—

$$X=10366482g, \qquad Y=7460514g,$$
$$Z=7358060g, \qquad T=4149387g.$$

এবং

$$x=7206360g, \qquad y=4893246g$$
$$z=3515820g, \qquad t=5439213g.$$

এই সমাধান থেকে দেখা যাচ্ছে যে, সমস্যাটির নির্দিষ্ট কোন উত্তর নেই। কারণ, উত্তর নির্ভর করে আছে g-এর মান-এর ওপর। g-এর মান 1 হলে সংখ্যাগুলিই ষাঁড় ও গাভী।[৪]

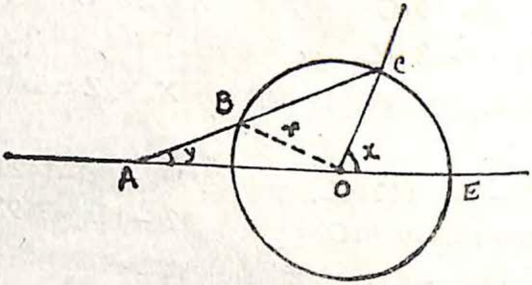
কোণের দ্বিখণ্ডীকরণ সমস্যা গ্রীকগণিতের অন্যতম তিনটি বিখ্যাত সমস্যার একটি। এই সমস্যাটি যে কেবল রুলার-কম্পাসের সাহায্যে সমাধান সম্ভব নয়, তার আলোচনা ইতিপূর্বেই আমরা করেছি। রুলারকে কেবল দুটি বিন্দুর মধ্য দিয়ে সরলরেখা অঙ্কনের যন্ত্র হিসাবে দেখলে, এ-সমস্যার সমাধান অসম্ভব। কিন্তু রুলারের অন্য ধরনের ব্যবহারের কথা বিবেচনা করলে বিখ্যাত এই সমস্যার

৪. প্রবন্ধটি 'গণিতচর্চা' পত্রিকায় প্রকাশিত, তৃতীয় সংখ্যা, ১৯৮৩

History of Mathematics—F. Cajori, 1893.

100 Great Problems of Elementary Mathematics—Heinrich Dörie, Dover, N. Y.

সম্ভাব্য সমাবান সম্ভব। এই রকম এই পদ্ধতির বিবরণ দিয়েছেন আর্কিমিডিস। আমরা তাঁর পদ্ধতির সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দিলাম।



চিত্র—20

চিত্রে **x** যে-কোন কোণ। এই কোণের ভূমিকে বাম দিকে সম্প্রসারিত করা হলো এবং O-কে কেন্দ্র করে যে-কোন r ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হলো। রুলারের ওপর **A** ও **B** এমন দুটি বিন্দু চিহ্নিত করা হলো যাতে **AB=r** হয়। অর্ধবৃত্তের ওপর **B** বিন্দুটি স্থাপন করে রুলারের **A** বিন্দু সম্প্রসারিত ভূমির ওপর প্রতিষ্ঠিত করা হলো এবং রুলারের অপর প্রান্ত যেন অর্ধবৃত্ত ও কোণের অপর বাহুর ছেদবিন্দু দিয়ে যায় সেদিকে দৃষ্টি দেওয়া হলো। রুলারের এই অবস্থানে সরলরেখা অঙ্কন করা হলো।

তা হলে $y=x/3$ হবে।[৫]

প্রমাণ ঃ যেহেতু, $AB=OB=OC=r$,

ΔAOB ও ΔBOC সমদ্বিবাহু

সুতরাং $m\angle AOB=m\angle BOA$

এবং

$m\angle OBC=m\angle BCO$

আবার যেহেতু ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান,

সুতরাং
$$\begin{aligned} m\angle EOC &= m\angle OAB+m\angle BCO \\ &= m\angle OAB+m\angle OBC \\ &= m\angle OAB+m\angle OAB+m\angle BOA \\ &= m\angle OAB+m\angle OAB+m\angle OAB \\ &= 3m\angle OAB \\ &= 3m\angle EAC \end{aligned}$$

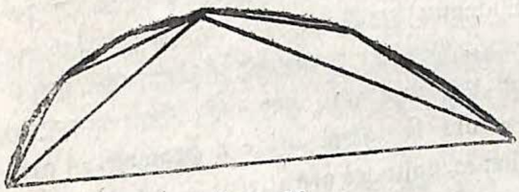
৫. What is Mathematics ? R. Courant & H. Robbins, Page—138

অতএব, $m\angle EAC=\frac{1}{3}m\angle EOC$

বা, $y=x/3$ প্রমাণিত।[৬]

ইউডকসাস নিঃশেষীকরণ পদ্ধতির আবিষ্কারক। এই পদ্ধতি ক্রমিক বিভাজনের ওপর নির্ভরশীল; ক্রমিক বিভাজন অতি ক্ষুদ্রাংশ পর্যন্ত সম্ভব। ইউক্লিড এই পদ্ধতি প্রয়োগ করেছিলেন, কিন্তু উন্নতি, সংস্কার, পরিপূর্ণতা তাঁর হাতে আসেনি। আর্কিমিডিস এই পদ্ধতি প্রয়োগ করেন, সংস্কার, উন্নতি, ও পরিপূর্ণতা আনেন। বস্তুত গণিতে বিশেষ পদ্ধতিরূপে স্বীকৃতি ও প্রধান অস্ত্র হিসাবে ব্যবহার তাঁর হাতেই হয়। ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয়ের নানা জটিল সমস্যায় এই পদ্ধতির ব্যবহার দেখা যায়। তাঁর Method ও Quadrature of the Parabola গ্রন্থে এই পদ্ধতির প্রয়োগ দেখা যায়,—বিশেষ করে শেষোক্ত গ্রন্থে।

অধিবৃত্তাংশ-এর **(Segment of Parabola)** ক্ষেত্রফল একই ভূমি ও শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের চার-তৃতীয়াংশ।



চিত্র—**21**

চিত্রে অধিবৃত্তাংশ ও ত্রিভুজ একই ভূমি ও শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট। মনে করা যাক, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল=**A**। অধিবৃত্তাংশের ছিন্ন দুটি ক্ষুদ্র অংশে পূর্বের ন্যায় ত্রিভুজ অঙ্কন করা হলো। এইভাবে ক্রমশ ক্ষুদ্রতর অধিবৃত্তাংশের মধ্যে ত্রিভুজ অঙ্কন করতে থাকলে বহুভুজ পাওয়া যাবে। আর্কিমিডিস দেখিয়েছেন এইরকম **n**-বহুভুজের ক্ষেত্রফল নিম্নরূপ শ্রেণীটির দ্বারা প্রকাশ করা যায়ঃ

$$A\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)$$

অসীমসংখ্যক পর্যন্ত ওপরের শ্রেণীর সমষ্টি $=\frac{4}{3}A$

আর্কিমিডিস অবশ্য এরকম যুক্তি দেখাননি। তিনি **n**-পদের সমষ্টির সঙ্গে অবশিষ্ট যোগ করে সমতা-চিহ্ন (=) ব্যবহার করেছেন ঃ

$$A\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}\right)=\frac{4}{3}A$$

---

৬. The Historical roots of Elimentary Mathematics—Bunt, Jones & Bedient, Page—104.

$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}\right)$-কে উপেক্ষা করায় এখানে **সীমার** (limit) ধারণা আছে বলে মনে করা হয়,—যদিও আর্কিমিডিস এভাবে ব্যাখ্যা করেননি।

সমাকলন (Integral Calcu'us) সম্পর্কে আর্কিমিডিসের অনুমান ঃ

সমাকলনের পূর্বাভাস ইউডকসাস আবিষ্কৃত নিঃশেষীকরণ পদ্ধতির মধ্যে নিহিত আছে বলে অনুমান করা হয়। কিন্তু অতিবৃহৎ ও অতিক্ষুদ্রের ধারণা গ্রীক গণিতজ্ঞদের মনঃপূত ছিল না। সোফিস্ট সম্প্রদায়ভুক্ত অ্যান্টিফোন যিনি সক্রেটিসের সহিত বিতর্ক করতেন তিনি বলেন, কেউ যদি বৃত্তের মধ্যে বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করে, অষ্টভুজ অঙ্কিত করে, চারটি বৃত্তাংশের মধ্যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করে, তারপর আবার আটটি বৃত্তাংশের মধ্যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করে ইত্যাদি এমনভাবে যতক্ষণ না বৃত্তের ক্ষেত্রফল নিঃশেষিত হয় ততক্ষণ যদি বহুভুজ অঙ্কন করা যায়, তা হলে তাদের ক্ষুদ্রত্বের জন্য বাহুগুলি বৃত্তের পরিসীমার সহিত তুল্য হবে। কিন্তু সিমপ্লিসিয়াস (Simplicius) ছিলেন এই মতের বিরোধী। তিনি ইউডিমাসের (Eudemus) মত উল্লেখ করে বলেছেন, অসীম পর্যন্ত বিভাজিত করলেও বৃত্তে অন্তর্লিখিত বহুভুজ কখনোই পরিসীমার তুল্য হবে না অর্থাৎ উভয়ে মিলেমিশে এক হয়ে যাবে না। এবং কারণ উল্লেখ করে বলেছেন, "and to suppose it would is to set aside a geometrical principle which lays down that magnitudes are divisible *ad infinitum*."[৭] যে কথা আগে উল্লেখ করেছি যে, গ্রীক গণিতে তখনো অতিবৃহৎ ও অতিক্ষুদ্র গ্রহণ করার মত সময় আসেনি। সেইজন্য তারা এমন সিদ্ধান্ত কখনো করেনি যে, বৃত্ত হচ্ছে এমন একটি বহুভুজ যার বাহুগুলি অনির্দিষ্ট ক্ষুদ্র-সংখ্যক ; আর কোন শ্রেণীর অনির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টির সীমিত মানের (limiting value) কথাও বলেনি।

এ-সব সত্য,—ঐতিহাসিক সত্য। কিন্তু তাঁরা এমন কিছু সিদ্ধান্তে পৌঁছে-ছিলেন যাতে সীমার ধারণা দেখা যায়। যেমন, সমানুপাতের ক্ষেত্রে বৃত্তসমূহ পরস্পর তাদের ব্যাসের বর্গের সমানুপাতী। এই প্রতিজ্ঞার সত্য নিরূপণে তাঁদের এই ধারণার অনুবর্তী হতে হয়েছিল যে, বৃত্তকে অন্তর্লিখিত সুষম বহুভুজের সীমা হিসাবে গণ্য করতে হবে, যদি তার বাহুগুলি অনির্দিষ্টভাবে বৃদ্ধি করে ক্ষুদ্র করা যায়। কিন্তু এরকম সিদ্ধান্তে সন্তুষ্ট থাকেননি,—আরো অকাট্য, অখণ্ডনীয় প্রমাণের প্রয়াস পেয়েছিলেন। কিন্তু তা ছিল পরোক্ষ। তাই নিঃশেষীকরণ পদ্ধতির প্রমাণের (Theory of Exhaustion) মধ্যে আমরা 'অসম্ভাব্যতা'-র পরিচয় পাই, বস্তুত-পক্ষে তা প্রতিজ্ঞার মধ্যে থাক বা নাই থাক। এই প্রমাণ সম্পর্কে হীথের মন্তব্য উল্লেখ করা হলো ঃ "Moreover, this stringent verification, by means

৭. The Works of Archimedes—T. L. Heath, Page—CXLII

of a double *reductio ad absardum*, is repeated in every individual instance of the use of the method of exhaustion ; there is no attempt to establish, in lieu of this part of the proof, any general propositions which could be simply quoted in any particular case."[৮]

গ্রীক নিঃশেষীকরণ পদ্ধতির মধ্যে যে-সব সাধারণ লক্ষণ ও বৈশিষ্ট্য দেখা যায়, আর্কিমিডিসের নিঃশেষীকরণ পদ্ধতির মধ্যেও ওই একই লক্ষণ ও বৈশিষ্ট্য পরিলক্ষিত হয়। ইতিপূর্বে আমরা একই ভূমি ও শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজ ও অধিবৃত্তাংশের ক্ষেত্রফলের সম্পর্ক সম্বন্ধে আলোচনা করেছি। সে-যুগে আর্কিমিডিস যে-ফল পেয়েছিলেন, আমরা এ-যুগে তাকে বলতে পারি যে, 'n' অনির্দিষ্টভাবে বৃদ্ধি পাচ্ছে। আর আমাদের এই সিদ্ধান্ত যে, $(\frac{1}{4})^{n-1}$ অনির্দিষ্টভাবে ক্ষুদ্র হচ্ছে এবং বাম পক্ষের সমষ্টির সীমা-ই হচ্ছে অধিবৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল এবং তা $\frac{4}{3}$ A. আমরা আগেই বলেছি, আর্কিমিডিস এরূপ মন্তব্য করেননি। তিনি সনাতন প্রথানুসারে প্রমাণ করেছেন যে, এই ক্ষেত্রফল $\frac{4}{3}$A-এর চেয়ে বড় বা ছোট হতে পারে না। যাই হোক, গ্রীক চিন্তা-ভাবনা অতিক্ষুদ্র বা অতিবৃহত্তের অনুকূল হলে আর্কিমিডিস সম্ভবত সমাকলন ও অবকলনের আবির্ভাব ত্বরান্বিত করতে সমর্থ হতেন,—এরূপ অনুমান আকাশকুসুম নয় বলে মনে হয়।

On Conoids and Spheroids গ্রন্থে তিনি কনিকের ঘূর্ণন দ্বারা উৎপন্ন বস্তুর ধর্মাদি আলোচনা করেছেন। অধিবৃত্ত ও পরাবৃত্তের অক্ষের ওপর ঘূর্ণন দ্বারা যে বস্তু উৎপন্ন হয়, তা-ই **Conoid** বা শঙ্কুজ ; পরাক্ষ বা উপাক্ষের ওপর উপবৃত্তের ঘূর্ণনে **Spheroid** বা উপগোলক উৎপন্ন হয়। এই গ্রন্থের 5নং প্রতিজ্ঞাটি নিম্নরূপ ঃ

AA′ ও BB′ কোন উপবৃত্তের পরাক্ষ (major axis) ও উপাক্ষ (minor axis) এবং d কোন বৃত্তের ব্যাস হলে, উপবৃত্ত ও বৃত্তের ক্ষেত্রফলের অনুপাত পরাক্ষ ও উপাক্ষের গুণফল ও ব্যাসের বর্গের অনুপাতের সমান হবে। অর্থাৎ

$$\frac{\text{উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তের ক্ষেত্রফল}}=\frac{AA'.BB'}{d^2}$$

গণিতের ভাষায় প্রকাশ করলে,

উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল$=S$, বৃত্তের ক্ষেত্রফল$=S'$, পরাক্ষ$=2a$ ও উপাক্ষ$=2b$ হলে,

$$\frac{S}{S'}=\frac{4ab}{d^2},$$

[কারণ, $S=\pi ab$ এবং $S'=(\pi/4)d^2$]

৮. The Works of Archimedes—CXLIII

গোলক, বৃত্ত, চোঙ ইত্যাদির সম্পর্ক নিয়ে তাঁর প্রতিজ্ঞাগুলি সত্যই চিত্তাকর্ষক। এখানে দু-একটির উল্লেখ করা হলো ঃ

(a) **গোলকের পৃষ্ঠফল তার মধ্যস্থিত বৃহত্তম বৃত্তের ক্ষেত্রফলের চার গুণ।**

(b) **গোলকের মধ্যস্থিত বৃহত্তম বৃত্ত যদি কোন চোঙের ভূমি ও গোলকের ব্যাস উচ্চতা হয়, তা হলে চোঙের আয়তন গোলকের আয়তনের $\frac{3}{2}$ গুণ হবে, এবং তার পৃষ্ঠফল ও ভূমি একত্রে গোলকের পৃষ্ঠফলের $\frac{3}{2}$ গুণ হবে।**

শেষের প্রতিজ্ঞাটি বিশেষ একটি কারণে উল্লেখযোগ্য। আর্কিমিডিস এরূপ ইচ্ছা প্রকাশ করেছিলেন যে, মৃত্যুর পর যেন এই প্রতিজ্ঞার চিত্ররূপ তাঁর সমাধির ওপর খোদিত বা অঙ্কিত করা হয়। রোমান সেনাপতি তাঁর এই অন্তিম ইচ্ছা জেনে পূরণ করেছিলেন। এই কিংবদন্তী থেকেই পরে তাঁর সমাধির সন্ধান করা হয়, এবং সত্য সত্যই গোলকচোঙের চিহ্ন আবিষ্কৃত হয়।

প্লিনি যে তাঁকে **"the god of mathematics"** বলেছেন, তা বিন্দুমাত্র অত্যুক্তি নয়। বস্তুত এই মহাপ্রতিভাধর গণিতজ্ঞের অবদান ও কৃতিত্বের সম্যক বিশ্লেষণ সম্ভব নয়। তাই কলনবিদ্যার অন্যতম আবিষ্কারক লিবনিজ তাঁর জয়গান করে বলেন, **"those who knew his works…marveled less at the discoveries of the greatest modern scholars."**[৯]

৯. History of Mathematics, Vol-I, D. E. Smith, Page—111

একাদশ অধ্যায়

হীরন

(100 খ্রীস্টপূর্বাব্দ—100 খ্রীস্টাব্দ)

"In most sciences one generation tears down what another has built and what one has established another undoes. In mathematics alone each generation adds a new story to the old structure."

Hermann Hankel.

গণিতের প্রকৃতি ও বৈশিষ্ট্য বিচারে গ্রীকগণিত সাধারণত দুইভাগে বিভক্ত ঃ ক্লাসিক্যাল ও আলেকজান্দ্রিয়। হীরনের মধ্যে এই দু-রকম বৈশিষ্ট্যের প্রকাশ দেখা যায়। গণিতের ইতিহাসে তাঁর অন্য গুরুত্ব থাকলেও এই উভয় বৈশিষ্ট্যের আশ্চর্যজনক সমন্বয় বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ বলে বিবেচিত হয়। পূর্ববর্তী গ্রীক গণিতজ্ঞরা যে ব্যবহারিক দিকের অনুশীলন করে একটি স্পষ্ট ধারা প্রবর্তিত করেছিলেন, সেই ধারা বা বিশেষত্বের চরম বিকাশ হীরনের মধ্যে দেখা যায়। শুধু তাই নয়, তাঁর গাণিতিক ও বৈজ্ঞানিক গবেষণায় আর একটি বৈশিষ্ট্য পরিলক্ষিত হয়,—মিশরীয় বৈশিষ্ট্য। বস্তুত তাঁর ওপর মিশরীয় গণিতের প্রভাব সবিশেষ কার্যকর ছিল বলে মনে হয়।

হীরনের পরিচয়

হীরনের আবির্ভাবকাল নিয়ে নানা মতভেদ দেখতে পাওয়া যায়। কেউ বলেন তিনি খ্রীস্টপূর্ব শতাব্দীর, আর কেউ বলেন খ্রীস্টীয় শতাব্দীর। তাঁর রচনার মধ্যে পরিণত ও অপরিণত মনের ছাপ দেখা যায়। তাই অনেকে দু-জন হীরনের অস্তিত্ব কল্পনা করেন। আমাদের আলোচ্য হীরন অবশ্য জ্যেষ্ঠ হীরন। ঐতিহাসিকদের মধ্যে তাঁর আবির্ভাবকাল নিয়ে যে বিতর্ক তাতে প্রায় চারশ' বছরের ব্যবধান দেখা যায়। কিন্তু আধুনিক ঐতিহাসিকরা তাঁর জীবনকাল প্রথম শতকের নিকটবর্তী বলে অনুমান করেন। গ্রীক গণিতের বিখ্যাত ঐতিহাসিক **T. L. Heath** অবশ্য তাঁকে তৃতীয় শতাব্দীর বলে মনে করেন।

তাঁর গ্রন্থে স্টেসিবিয়াস-এর (**Ctesibius**) সশ্রদ্ধ উল্লেখ আছে,—তাঁর কাছে ঋণও স্বীকার করেছেন। সম্ভবত তিনি স্টেসিবিয়াসের ছাত্র ছিলেন। এমন কি এরূপ মনে করাও হয় যে, হীরন স্টেসিবিয়াসের পুত্র। সে যাই হোক, হীরনের পাণ্ডিত্য প্রায় বিশ্বকোষীয় ; বহু বিষয়ের ওপর তাঁর গবেষণা ও আবিষ্কার আছে। আর তাঁর রচনাবলীর বিষয়বস্তুও বহুবিস্তৃত। প্রোক্লাস তাঁকে *mechanicus* বলে

উল্লেখ করেছেন। মনে হয়, হীরন ছিলেন আধুনিক যুগের একজন সফল মেকানিক্যাল ইঞ্জিনিয়ার।

তাঁর রচনার মধ্যে একদিকে যেমন সূক্ষ্ম গাণিতিক ন্যায় পরিলক্ষিত হয়, তেমনি আবার স্থূল পদ্ধতি ও সূত্রও দেখা যায়। তিনি আর্কিমিডিসের সূক্ষ্ম গবেষণার ফল কাজে লাগিয়েছেন, এলিমেণ্টস-এর টীকা-ভাষ্য রচনা করেছেন এবং ইউক্লিডীয় জ্যামিতির অনেক উপপাদ্য প্রমাণ করেছেন। আবার দেখা যায়, তিনি যেন ব্যবহারিক ও ফলিত জ্যামিতির পক্ষপাতী ; বলবিদ্যার আলোচনা করেছেন এবং ক্ষেত্র বিশেষে স্থূল গাণিতিক সূত্র ব্যবহার করতে বিন্দুমাত্র দ্বিধাবোধ করেননি। একই সূত্রের স্থূল ও সূক্ষ্ম দুটি রূপই প্রাচীন ভারতীয় গণিতজ্ঞদের গ্রন্থেও দেখা যায়। দ্বিধাহীন চিত্তে হীরন মিশরীয় সূত্র প্রয়োগ করেছেন,—তা স্থূল কি সূক্ষ্ম সেদিকে দৃষ্টি দেননি। তাঁর রচনায় মিশরীয় প্রভাব বহুল পরিমাণে দেখা যায় বলে অনেকে মনে করেন হয়তো তাঁর আদি নিবাস মিশরেই ছিল।

কয়েকটি গ্রন্থের সংক্ষিপ্ত পরিচয়

জ্ঞান-বিজ্ঞানের নানা বিষয়ের ওপর হীরনের রচনা দেখা যায়। তাঁর গণিত সম্পর্কিত গ্রন্থগুলির নাম **Metrica, Geometrica, Geodesy, Sterometry** এবং **Dioptra**, নানা ব্যবহারিক ও ফলিত বিষয়গুলির নাম **Mechanics, The Construction of Catapults, Measurements, The Design of Guns, Pneumatica, On the Art of Construction of Automata** ইত্যাদি।

Metrica ও **Geometrica** গ্রন্থে তিনি উপপাদ্য, সমতলের ক্ষেত্রফল, পৃষ্ঠ-দেশের ক্ষেত্রফল ও নানা ধরনের বস্তুর আয়তনের নিয়ম ও সূত্রাদি আলোচনা করেছেন। আলোচিত উপপাদ্য ও প্রমাণাদি তেমন কিছু নতুন নয়,—বেশীর ভাগই পূর্ব নির্ধারিত পথে। যেমন, বক্ররেখা দ্বারা উৎপন্ন ক্ষেত্রের আলোচনায় তিনি আর্কিমিডিসের গবেষণার ফলের সাহায্য নিয়েছেন। তাঁর অনেক গ্রন্থের বিকৃতি ঘটেছে, কিন্তু **Metrica**-র তেমন বিকৃতি ঘটেনি। এই গ্রন্থটি তাই তাঁর গাণিতিক প্রতিভা মূল্যায়নে সবিশেষ উপযোগী,—অন্তত **Heath** সাহেব তাই মনে করেন।[১] **Geodesy**[২] ও **Sterometry**-তে নতুন কিছুর সংযোজন দেখা যায় না। এখানে আগের গ্রন্থ দুটির বিষয়বস্তুই স্থান পেয়েছে ; তবে তাত্ত্বিক দিকের চেয়ে সংখ্যাগত ফলের দিকে বেশী দৃষ্টি দেওয়া হয়েছে।

Mechanics তাঁর খুবই উল্লেখযোগ্য গ্রন্থ। এই গ্রন্থে তৎকালীন ব্যবহৃত পাঁচ প্রকার যন্ত্রের সবিশেষ বর্ণনা আছে। এগুলি চাকা ও চাকার অক্ষদণ্ড, লিভার, কপিকল, কীলক (**wedge**)। **Pneumatica**-তে বায়ুর চাপের তত্ত্ব ও ব্যবহার

১. Encyclopaedia Britannica, Heron of Alexandria প্রবন্ধ

২. হিন্দিতে Geodesy—ভূমিতি ;

আলোচনা প্রসঙ্গে সাইফন, ফোয়ারা, জলতরঙ্গ ও আগুনে ইঞ্জিন, বাষ্পশক্তির প্রয়োগের দ্বারা উদ্ভাবিত নানাবিধ যন্ত্রের ব্যবহার নিয়ে আলোচনা করেছেন। তা ছাড়া যুদ্ধে ব্যবহৃত নানা প্রকার যন্ত্রের কথা তাঁর গ্রন্থে দেখতে পাওয়া যায়। হীরন গাণিতিক তত্ত্বও নিয়মাদি থিয়েটার গৃহ পরিকল্পনায়, ভোজগৃহ এবং স্নানাগার তৈরীতে প্রয়োগ করেছেন। মনে হয়, তিনি প্রকৃতই মেকানিক্যাল ইঞ্জিনিয়ার ছিলেন।

যাদুবিদ্যা বা ইন্দ্রজাল বা ভোজবাজীর প্রতি মানুষের সর্বকালের আকর্ষণ। হীরন এই সুযোগ নিয়ে নানা ধরনের যন্ত্র নির্মাণ করেছিলেন। তাঁর **Pneumatica** গ্রন্থে এমন প্রায় 80টি যন্ত্রের বর্ণনা ও উল্লেখ আছে। এখনো অনেক ছোটখাট ম্যাজিশিয়ান এক ধরনের জলপাত্র ব্যবহার করে ম্যাজিক দেখানোর ফাঁকে ফাঁকে **Water of India** বা এই ধরনের কোন বাক্যাংশ ব্যবহার করে জলপাত্র উপুড় করে কিছুটা জল বার করে দর্শকদের বিস্মিত করার চেষ্টা করে। হীরনও এই রকম যন্ত্রাদি নির্মাণ করেছিলেন। উদাহরণস্বরূপ তাঁর **Harmonious Jars**-এর উল্লেখ করা যায়। এই **Harmonious Jar** এমন এক ধরনের কলসী যে যত জল ঢালা যাক না কেন উপচে পড়বে না। এর নাম **রাক্ষুসে কলসী**। তা ছাড়া আয়নার কারসাজি করে দর্শকদের নানা বিভ্রান্তি ঘটিয়ে ম্যাজিকের ব্যবস্থা করার মতন যন্ত্রাদি তিনি তৈরী করেছিলেন। দর্শকরা এরকম আয়নার সামনে এলে দেখতে পেত তার মাথা নীচের দিকে আর পা ওপরের দিকে, দুটি চোখের বদলে তিনটি চোখ, একটা নাকের বদলে তিনটি নাক ইত্যাদি। বলা বাহুল্য, এগুলি ম্যাজিক হলেও এসব যন্ত্রনির্মাণে বৈজ্ঞানিক তত্ত্ব ও সূত্রাদির প্রয়োগ আছে। বস্তুত আধুনিক ম্যাজিক-এর কিছু কিছু খেলা নিখুঁত বৈজ্ঞানিক তত্ত্ব ও সূত্রের সুনিপুণ প্রয়োগ।

হীরনের বিজ্ঞান ও গণিতে পারদর্শিতার কথা যেমন অস্বীকার করার উপায় নেই, তেমন আবার তাঁর ম্যাজিক বা রহস্যময়তার প্রতিও ঝোঁক ছিল বলে স্বীকার করতে হয়। অবশ্য এসবে তাঁর প্রতিভার প্রকৃত মূল্যায়ন হয় না। কিন্তু কেন যে তিনি অমূল্য সময় এই তুচ্ছ যন্ত্র নির্মাণে ব্যয় করেছিলেন, তা সঠিক করে বলা মুশকিল। যেমন, বলা মুশকিল, কেন কোন কোন বিজ্ঞানী গ্রহ-রত্ন-তাগা-তাবিজ-কোষ্ঠী ইত্যাদিতে বিশ্বাস করেন।

গণিতে অবদান

আমরা ইতিপূর্বে আর্কিমিডিসের আলোচনা প্রসঙ্গে গ্রীক সংখ্যা লিখন ও গঠন কিরূপ জটিল ও দুরূহ ছিল, তা নিয়ে সামান্য আলোচনা করেছি। হীরনের সময়েও ওই একই প্রকার সংখ্যা লিখন ও গঠন প্রচলিত ছিল। প্লেটো-ইউক্লিডের যুগে গণিতে সংখ্যার সংস্কার ও উন্নতির প্রতি আগ্রহ দেখা যায়নি সত্য, কিন্তু আর্কিমিডিস, অ্যাপোলোনিয়াস ও টলেমী প্রভৃত উন্নতি না করলেও সামান্য

সংস্কার ও উন্নতি করেছিলেন। বস্তুত গ্রীক গণিতে এ'রাই সাংখ্যিক দিকটির পথিকৃৎ। তারপর আর্কিমিডিস-অ্যাপোলোনিয়াস-টলেমীর পথেই এলেন হীরন ও নিকোম্যাকাস। মিশরীয় গণিতে যেমন একক ভগ্নাংশের ব্যবহার দেখা যায়, তেমনি হীরনের **Metrica**-তেও একক-ভগ্নাংশের ব্যবহার দেখা যায়। তাঁর $\sqrt{63}$-র আসন্ন মান নির্ণয় নিম্নরূপ ঃ

$$\sqrt{63}=7+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$$

বর্গমূল ও ঘনমূল নির্ণয়ে তিনি পাটীগাণিতিক পদ্ধতি ব্যবহার করেছিলেন। কিন্তু এ-সম্পর্কে ভারতীয় বিশেষজ্ঞরা এক মত নন। প্রকৃতপক্ষে বিশুদ্ধ পাটীগাণিতিক পদ্ধতির প্রয়োগ আর্যভটের **আর্যভটীয়** গ্রন্থে দেখা যায় এবং তা-ই পরবর্তী গণিতজ্ঞ ব্রহ্মগুপ্ত ও ভাস্কর ব্যবহার করে অসামান্য কৃতিত্ব দেখিয়েছেন।

হীরন বীজগাণিতিক চর্চায় জ্যামিতিক ধারণার অনুপ্রবেশ ঘটাননি। তাঁর বীজগণিত সম্পূর্ণ জ্যামিতিক ধারণা মুক্ত বলা যায়। এক বিষয়ে প্রাচীন ভারতীয় গণিতজ্ঞদের সঙ্গে তাঁর মিল আছে। প্রাচীন ভারতীয় গণিতজ্ঞদের গ্রন্থে সূত্রের বর্ণনা ও প্রক্রিয়া দেখা যায়, প্রমাণাদি নেই। হীরন ঠিক এই পথই অবলম্বন করেছিলেন।

উদাহরণ ঃ একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ও পরিসীমার সমষ্টি 896 ফুট ; বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

হীরন এই সমস্যা সমাধানে কোন প্রতীক-চিহ্ন ব্যবহার করেননি। তাঁর পদ্ধতি সম্পূর্ণ মৌখিক বর্ণনাভিত্তিক বলে মনে হয়। আধুনিক গণিতের ভাষায় সমস্যাটির বীজগাণিতিক রূপ ঃ

$$x^2+4x=896$$

এই সমীকরণটির সমাধানে তিনি উভয় পক্ষে 4 যোগ করে পূর্ণ বর্গ করে বর্গমূল করেছেন। হীরনের এই পদ্ধতির মধ্যে মিশরীয় ও ব্যাবিলনীয় প্রভাব আছে বলে গণিতের ঐতিহাসিকরা মনে করেন। আমাদের মনে হয় এই পদ্ধতির সঙ্গে প্রাচীন ভারতীয় গণিতজ্ঞদের পদ্ধতির সাদৃশ্য আছে। আলেকজান্দ্রিয়া বিশ্ববিদ্যালয়ের সঙ্গে ভারতীয়দের একেবারে অপরিচয় ছিল না বলে অনেক ঐতিহাসিক স্বীকার করেন। তবে প্রমাণাদির অভাবে এ-সম্পর্কে নিশ্চিত করে কিছু বলা যায় না।

Geometrica গ্রন্থে হীরনের কয়েকটি অদ্ভুত ও আশ্চর্য ধরনের মন্তব্য দেখা যায় ঃ তিনি **ক্ষেত্রফল, পরিধি** ও **ব্যাস** যোগ করার কথা বলেছেন। ঐতিহাসিকরা বলেন, এমন ধরনের কথা বলার তাৎপর্য হচ্ছে এসবের **সংখ্যাগত মান**-এর নির্দেশ করা। ইতিপূর্বেই আমরা লক্ষ্য করেছি যে, ইউক্লিডের সময় জ্যামিতিতে বীজগণিত প্রচলিত ছিল। কিন্তু বীজগণিতের বা পাটীগণিতের স্বাতন্ত্র্য তেমন সুস্পষ্ট

ছিল না। হীরন এই কাজটি সমাধা করেছিলেন,—তিনি জ্যামিতিক-বীজগণিতকে পাটীগাণিতিক ও বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে রূপান্তরিত করেন।

জ্যামিতিতে তাঁর উল্লেখযোগ্য অবদানের অভাব নেই। তাত্ত্বিক ও ব্যবহারিক দু-ধরনের জ্যামিতির সুনিপুণ আলোচনা তাঁর গ্রন্থে দেখা যায়। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূক্ষ্ম সূত্রটি তাঁর **Geodesy** গ্রন্থে দেখতে পাওয়া যায় ঃ

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

আবার, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের স্থূল সূত্রটিও তাঁর গ্রন্থে দেখা যায় ঃ

$$\frac{a_1+a_2}{2}\times\frac{b}{2}$$

তাঁর **Dioptra** গ্রন্থে দুইটি বিন্দুর মধ্যে একটি আয়ত্তাধীন (**accessible**) থাকলে কিভাবে দূরত্ব নির্ণয় করা যায় তার বর্ণনা আছে ; আবার দুইটি বিন্দু দৃশ্যমান অথচ আয়ত্তাধীন না থাকলে দূরত্ব নির্ণয়ের পদ্ধতিও আছে। মাঠে প্রবেশ না করে কিভাবে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায় এমন পদ্ধতির বর্ণনা তাঁর গ্রন্থে দেখা যায়।

তাঁর গ্রন্থাদিতে নানা বিষয়ের প্রমাণ আছে, আবার নেই-ও। তিনি কোথাও সূক্ষ্ম সূত্র দিয়েছেন, আবার কোথাও স্থূল সূত্র। ব্যবহারিক কাজে সূক্ষ্ম ও যথার্থ সূত্রের যে প্রয়োগ না করলেও চলে তাতে সন্দেহ নেই। এমন কি সঠিক সূত্র ব্যবহার করতে গেলে অনেক সময় গণনায় জটিলতা ও অসুবিধা আসে। সে-কারণেই সম্ভবত তিনি দু-রকম সূত্রের অবতারণা করে থাকবেন। তাছাড়া গ্রীক যুগে ক্ষেত্রফল, আয়তন ইত্যাদি নির্ণয় অভিজাত শিক্ষার অঙ্গ হিসাবে পরিগণিত হতো না। সার্ভেয়ার, ছুতার, রাজমিস্ত্রী ও অন্যান্য কারিগরী কাজে এসব ব্যবহৃত হতো বলে সমাজে এ-সব কাজের সম্ভ্রম ছিল না।

হীরনের সময় থেকে গ্রীক যুগের পতন আরম্ভ হয়। পরবর্তী রোমান শাসকদের গণিতের প্রতি মোটেই আগ্রহ ছিল না। তাদের ছিল ব্যবহারিক দিকের প্রতি আগ্রহ ও দৃষ্টি। সুন্দর সুন্দর অট্টালিকা, বড় বড় রাজপথ, সেতু ইত্যাদি নির্মাণ কার্যে তাদের সব গাণিতিক ক্ষমতা ব্যয়িত হয়েছে বলা যায়। গ্রীক গণিত তাদের কাছে গ্রহণযোগ্য হয়নি বটে, কিন্তু ব্যবহারিক কাজের উপযোগী হীরনের গ্রন্থগুলি সমাদৃত হয় এবং দীর্ঘদিন প্রচলিত হতে থাকে। পরবর্তীকালে তাই অনেক স্থূল হস্তাবলেপনের ফলে তাঁর গ্রন্থের নানা বিকৃতিও ঘটে।

দ্বাদশ অধ্যায়

ক্লডিয়াস টলেমী

(আনুমানিক 168 খ্রীস্টাব্দ)

"After all, generally speaking, the cause of the first principles is either nothing or hard to interpret in its nature."

Ptolemy



ক্লডিয়াস টলেমী

আকাশের নীলিমা, সূর্যের উদয়াস্ত, রাত্রির অন্ধকারে লক্ষ লক্ষ তারার ঝিলিমিলি, কখনো বা জ্যোৎস্না কখনো বা অন্ধকার, চন্দ্রের হ্রাস-বৃদ্ধি অতীত-কালের মানুষের অসীম বিস্ময় উদ্রেক করত। কিন্তু বিস্ময়ে বিহ্বল হয়ে চুপ করে বসে থাকার পাত্র নয় মানুষ। বিস্ময় থেকে জিজ্ঞাসা—জিজ্ঞাসা থেকে পর্যবেক্ষণ। তারপর নীতি, নিয়ম সূত্রাদির আবিষ্কার। এমনি করেই ক্রমাগত মানুষ প্রকৃতির রহস্যভেদ করে চলেছে। প্রাত্যহিক জীবনের ছোটখাট হিসাব-

নিকাশের বাইরে মানুষের প্রথম তত্ত্বানুসন্ধান জ্যোতির্বিজ্ঞানকে কেন্দ্র করে। জ্যোতির্বিজ্ঞান মানুষের ঊষাকালের গণিত।

জ্যোতির্বিজ্ঞানের আদি ভূমি মিশর, ব্যাবিলন, চীন ও ভারত। এইসব দেশের জ্যোতিষ বা জ্যোতির্বিজ্ঞান চর্চা খুবই প্রাচীন। গ্রীকসভ্যতা ও তার জ্যোতির্বিজ্ঞান চর্চা সে তুলনায় নবীন। গণিতের ইতিহাসের দিকে তাকালে দেখা যায়, গণিত ও জ্যোতির্বিদ্যায় ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক,—বড় অঙ্গাঙ্গী ভাব। আধুনিক যুগে এই দুটি বিদ্যা পৃথকভাবে আলোচিত হলেও প্রাচীন যুগে তা হয়নি। তখন গণিত চর্চা, জ্যোতির্বিদ্যা চর্চার অঙ্গ হিসাবেই পরিগণিত হতো। প্রাচীন ভারতীয় গণিতের আলোচনায় দেখা যায়, আর্যভট-ব্রহ্মগুপ্ত-ভাস্করাচার্য প্রমুখ গণিতজ্ঞরা প্রধানত জ্যোতির্বিদই ছিলেন। আর এই শাস্ত্রের আলোচনা ও গবেষণা প্রসঙ্গেই গাণিতিক আলোচনা ও আবিষ্কার করেছেন।* গ্রীসে তত্ত্বীয় জ্যোতির্বিজ্ঞান চর্চা শুরু হয় ইউডকসাসের সময় থেকে। বস্তুত, তিনিই প্রথম তত্ত্বীয় জ্যোতির্বিজ্ঞানের সূত্রপাত করেন। আর তাঁরই পথে ও অনুপ্রেরণায় ইউক্লিড জ্যোতির্বিজ্ঞান আলোচনা করেন। কিন্তু গ্রীক জ্যোতির্বিজ্ঞানে সর্বশ্রেষ্ঠ অবদান **অ্যারিস্টারকাস**-এর (Aristarchus)। তাঁকে **প্রাচীনকালের কোপারনিকাস** বলা হয়। তিনি সূর্যকেন্দ্রিক জগতের প্রথম প্রবক্তা। তারপর গ্রীক জ্যোতির্বিজ্ঞান চর্চায় যিনি একটি ধারা প্রবর্তন করতে সমর্থ হন, তিনি হলেন **হিপারকাস** (Hipparchus)। তাঁর মূল গ্রন্থাদি অবলুপ্ত হলেও পরবর্তীকালের বিখ্যাত জ্যোতির্বিদ টলেমীর রচনা থেকে কিছু কিছু জানতে পারা যায়।

টলেমী পরিচিতি

টলেমীর ব্যক্তি-জীবনের কাহিনী কিছুই জানা যায় না। অনুমান করা হয়, তিনি সম্ভবত গ্রীক ছিলেন না,—মিশরীয় ছিলেন। আলেকজান্দ্রিয় বিশ্ববিদ্যালয়ের প্রতিষ্ঠাতা ও পৃষ্ঠপোষক টলেমী রাজবংশের সঙ্গে তাঁর কোন সম্পর্ক নেই। রাজ-পরিবার বা রাজাদের সঙ্গে সংশ্রব নাই থাক, কিন্তু গণিত-রাজ্যের রাজাদের সঙ্গে যে তাঁর ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক ছিল তাতে সন্দেহ নেই। বস্তুত, তিনি এই রাজ্যের রাজাদের যোগ্য উত্তরাধিকারী। তাঁর সময়কাল নিয়েও সুস্পষ্ট করে কিছু বলা যায় না। তবে তিনি যে খ্রীস্টীয় দ্বিতীয় শতাব্দীতে বর্তমান ছিলেন, তাতে সন্দেহ নেই। সম্ভবত 139 খ্রীস্টাব্দের নিকটবর্তী কোন সময়ে তিনি জন্মগ্রহণ করে থাকবেন।

ইউক্লিড জ্যামিতিতে একটি সর্বকালীন মানদণ্ড ও নতুন ধারা ও ঐতিহ্য প্রতিষ্ঠা করেছিলেন। অ্যাপোলোনিয়াস কনিকে অনুরূপ সাফল্য ও কৃতিত্ব অর্জন

* 'আর্যভটীয়'-এর 121টি শ্লোকের মধ্যে মাত্র 33টি গণিত সম্পর্কিত আলোচনা; ব্রহ্ম-স্ফুট-সিদ্ধান্তের 24টি অধ্যায়ের মাত্র সাড়ে চারটিতে গণিতের আলোচনা,—তবে দ্বাদশ ও অষ্টাদশ অধ্যায়ই প্রধান। বিস্তারিত বিবরণ 'প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিবৃত্ত', পৃ—৬৪ এবং ৮০ দ্রষ্টব্য।

করেছিলেন। ঠিক তেমনি টলেমী তাঁর **অ্যালমাজেস্ট** (*Almagest*) রচনার মধ্য দিয়ে প্রাচীন-ঐতিহ্য ও ধারা অনুবর্তন করে জ্যোতির্বিজ্ঞানের একটি সুস্পষ্ট পথের ইংগিত দিতে পেরেছিলেন। তাঁর অ্যালমাজেস্ট বিদ্বৎসমাজে এমনই প্রভাব-প্রতিপত্তি বিস্তার করতে সমর্থ হয়েছিল যে, সপ্তদশ শতাব্দী পর্যন্ত এই মহাগ্রন্থটি বাইবেলের মত মর্যাদা লাভ করতে পেরেছিল।

অ্যালমাজেস্টের সংক্ষিপ্ত বিবরণ

টলেমীর সর্বশ্রেষ্ঠ অবদান অ্যালমাজেস্ট গ্রন্থটি। কিন্তু অ্যালমাজেস্ট নামটি গ্রন্থটির আসল নাম নয়, আসল নাম ***Syntaxis Mathematica*** বা ***Mathematical Collection***. আরবীয় অনুবাদে নাম পাওয়া যায় ঃ ***Megale Syntaxis*** → ***Megiste*** → ***Al Magisti***। ল্যাটিন অনুবাদে নাম হয় ***Almagestum***। ইংরেজী অনুবাদে এসে দাঁড়ায় ***Almagest***, গ্রন্থটির মূল গ্রীক অর্থ **বৃহৎসংহিতা**। 'সংহিতা'-র ভারতীয় অর্থের সঙ্গে গ্রীক অর্থের কিছুটা পার্থক্য দেখা যায়। সম্+হিত+টাপ্—স্ত্রীলিঙ্গে 'সংহিতা'। এর কয়েকটি অর্থ—**'A Compendium or Compilation of laws, a part of the Vedas'*** এতে ধর্মীয় ভাবনা যুক্ত। আবার **'Samhitā (i.e., Collection) as the term indicates, deals with astrology collectively, i.e., in general, taking the effect of the various natural phenomena on human life into consideration'**** ধরলে জ্যোতিষ বিষয়ক সংগ্রহ বোঝায়। কিন্তু টলেমীর অ্যালমাজেস্ট জ্যোতির্বিজ্ঞান সম্পর্কিত সংগ্রহ।

ইউক্লিডের এলিমেণ্টসের মত এই গ্রন্থটিও তেরো খণ্ডে বিভক্ত। সুবিশাল এই গ্রন্থটিকে প্রকৃতপক্ষে জ্যোতির্বিজ্ঞানের ইতিহাস বলা যায়। এতে টলেমী যেমন পূর্বসূরী জ্যোতির্বিদদের গবেষণা লিপিবদ্ধ করেছেন, তেমনি আবার তাঁর নিজস্ব পর্যবেক্ষণমূলক গবেষণাপ্রসূত তথ্যাদিও রয়েছে। তাঁর গ্রন্থে খ্রীস্টপূর্ব শতাব্দীর হিপারকাসের অনেক তত্ত্ব ও তথ্য দেখা যায়। টলেমী সৃজনশীল গণিতজ্ঞ ছিলেন না সত্য, কিন্তু জ্যোতির্বিজ্ঞান ও গণিতে তাঁর অগাধ পাণ্ডিত্য ছিল। আমাদের দেশের 'পঞ্চসিদ্ধান্তিকা', 'বৃহৎসংহিতা' রচয়িতা বরাহমিহিরের সঙ্গে তাঁর অনেক সাদৃশ্য দেখা যায়।

অ্যালমাজেস্টের প্রথম ও দ্বিতীয় খণ্ডে কয়েকটি সহজ জ্যোতির্বিজ্ঞানের বিষয় আলোচিত হয়েছে। এখানে সূর্য, চন্দ্র ও গ্রহদের গতি, পৃথিবীর আহ্নিক গতি, নক্ষত্রের উদয়াস্ত, খ-গোলের আবর্তন ইত্যাদির আলোচনা দেখা যায়। পৃথিবী যে গোল তার আলোচনা আছে, আবার পৃথিবীর পরিমাপ সম্বন্ধে গণনা দেখা যায় (180,000 স্টাডিয়া)। ত্রিকোণমিতির আলোচনা অতীব গুরুত্বপূর্ণ। তৃতীয়

* A Trilingual Dictionary, P—397

** Scientists, P—74

খণ্ডে বছরের ব্যাপ্তিকাল, সূর্য সম্পর্কে আলোচনা ও পঞ্জিকা সম্বন্ধে মন্তব্য মৌলিক না হলেও উল্লেখযোগ্য।

চন্দ্রের গতি ও গ্রহণ হচ্ছে চতুর্থখণ্ডের মূল আলোচ্য বিষয়। এখানে তাঁর মৌলিকতা লক্ষ করা যায়। টলেমী অনেক বিষয়েই হিপারকাসের মতবাদ, তথ্য গ্রহণ করেছেন বটে, কিন্তু এখানে হিপারকাসের মতবাদ তিনি গ্রহণ করেননি। হিপারকাস সূর্যের মত উৎকেন্দ্রীয় বৃত্তের সাহায্যে চন্দ্রের অসমান গতি ব্যাখ্যা করার প্রয়াস পেয়েছিলেন। কিন্তু টলেমী ডেফারেণ্ট ও পরিবৃত্তের কল্পনা করে চন্দ্রের গতির ব্যাখ্যা করলেন। পঞ্চমখণ্ডে অ্যাস্ট্রোল্যাব (Astrolabe) যন্ত্রের বর্ণনা আছে, লম্বনের সাহায্যে চন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় পদ্ধতিও আছে। বস্তুত এখানে হিপারকাসের গবেষণালব্ধ তত্ত্ব ও তথ্যাদি দেখা যায়। ষষ্ঠ খণ্ডে গ্রহণ সম্পর্কে আলোচনা, আর সপ্তম-অষ্টম খণ্ডে নক্ষত্র পরিচয়, তাদের অবস্থান আর তাদের তালিকা দেখা যায়। এখানে 1028টি নক্ষত্রের বিবরণ লিপিবদ্ধ আছে।

গ্রহদের গতি ও ভূ-কেন্দ্রীয় ব্রহ্মাণ্ডের পরিকল্পনা দেখা যায় নবম থেকে ত্রয়োদশ খণ্ডে। আধুনিক যুগের আগে পর্যন্ত টলেমীর খ্যাতি ও প্রতিপত্তি মূলত ভূ-কেন্দ্রীয় ব্রহ্মাণ্ড পরিকল্পনার জন্য। এই মতবাদের আগে সূর্যকেন্দ্রিক ও অগ্নিকেন্দ্রিক দু-রকম মতবাদ প্রচলিত ছিল। ভূ-কেন্দ্রীয় পরিকল্পনার প্রধান বৈশিষ্ট্য হচ্ছে পৃথিবী স্থির ; সূর্য ও গ্রহরা এককেন্দ্রিক বৃত্তে পৃথিবীকে পরিভ্রমণ করছে। তবে পৃথিবী বৃত্তের কেন্দ্রে নেই,—একটু দূরে আছে। বর্তমান বিজ্ঞান সভ্যতায় এই পরিকল্পনা হাস্যকর মনে হলেও তৎকালীন যুগে সূর্য ও গ্রহদের গতিসংক্রান্ত নানা সমস্যা তিনি যেভাবে সমাধান করেন, তা অবশ্যই কৃতিত্বের ও প্রশংসার যোগ্য। প্রসঙ্গত উল্লেখযোগ্য, কোপারনিকাস এই মতবাদের বিরোধিতা করেন এবং ক্রমশ ভূ-কেন্দ্রিক ব্রহ্মাণ্ড পরিকল্পনা পরিত্যক্ত হয়। অ্যালমাজেস্টের গুরুত্ব ও অবদান প্রসঙ্গে Hogben-এর মন্তব্যটি প্রণিধানযোগ্য : The intellectual fruits of these discoveries was set forth in a systematic form in the Almagest of Ptolemy, about A. D. 150, a book which played an important part in the astronomy of the Arabs, who translated it and transmitted it to Europe. From its pages the pioneers of the Great Navigations learned the art of map-making and of finding the position of a ship at sea. They also learned how much of the world remained to be explored.[১]

গণিতে অবদান

জ্যোতির্বিজ্ঞানের গবেষণা ও সূক্ষ্ম গণনার জন্য টলেমীকে নানা গাণিতিক

---

১. Mathematics for the Million—L. Hogben, Page—267

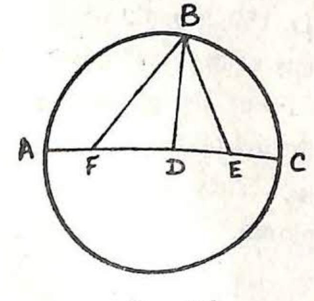
সমস্যার সম্মুখীন হতে হয়। এইসব সমস্যা প্রধানত ত্রিকোণমিতি, বিশেষত গোলীয় ত্রিকোণমিতি সম্পর্কীয়। অ্যারিস্টারকাসের হাতে ত্রিকোণমিতির বিকাশ ও উন্নতি হয় ; হিপারকাসের হাতে গণিতের এই শাখার সবিশেষ উন্নতি ঘটে। টলেমী তাঁর গ্রন্থে হিপারকাসের ত্রিকোণমিতির সূত্রাদির অবাধ ব্যবহার করেন। জ্যোতির্বিজ্ঞানে ত্রিকোণমিতির ব্যবহার তথা গণিত সম্পর্কে তাঁর স্বচ্ছ ধারণা ছিল। এ-সম্পর্কে একজন প্রখ্যাত আধুনিক গণিতের ঐতিহাসিক লিখেছেন ঃ **"He says that since only mathematical knowledge, approached inquiringly, will give its practitioners trustworthy knowledge, he was led to cultivate as far as lay in his power this theoretical discipline."**[২]

হিপারকাসের পদ্ধতি অবলম্বন করে বৃত্তের পরিধিকে টলেমী 360 ভাগে এবং ব্যাসকে 120 ভাগে ভাগ করেছেন। পরিধি ও ব্যাসের প্রত্যেক অংশকে আবার 60 ভাগে ভাগ করেছেন ; অবশেষে এদের প্রত্যেক অংশকে 60 ভাগে ভাগ করেছেন,—অর্থাৎ মিনিট ও সেকেণ্ডে ভাগ করেছেন। বলা বাহুল্য এখানে ব্যাবিলনীয় ষষ্ঠিক পদ্ধতি ব্যবহৃত হয়েছে।

অন্যান্য গ্রীক গণিতজ্ঞদের মত তিনি **সাইন**-এর (Sine) পরিবর্তে জ্যা-কোণ (chord of angle) শব্দটি ব্যবহার করেছেন। জ্যা-**সারণী** (**Table of chords**) প্রস্তুতি তাঁর এক অক্ষয় কীর্তি। প্রাচীন ভারতীয় গণিতে অর্ধ জ্যা (Half chord) শব্দটির ব্যবহার দেখা যায়। এ-বিষয়ে আর্যভটের অসামান্য কৃতিত্ব ভারতীয় গণিতের ইতিহাসে পরম গৌরবের। টলেমী জ্যা-সারণী প্রস্তুতিতে এই সূত্রটি ব্যবহার করেন :

$$\text{জ্যা } \alpha = 2R \sin \alpha/2, \text{ এখানে } R = 60$$

তাঁর 36° চাপের জ্যা (chord of 36° arc) নির্ণয় নিম্নরূপ ঃ



চিত্র—22

চিত্রে বৃত্তের ব্যাস ADC, কেন্দ্র D এবং BD⊥ADC ; E হচ্ছে DC-এর মধ্যবিন্দু এবং F এমন একটি বিন্দু যাতে EF=BE হয়। জ্যামিতিক উপায়ে টলেমী প্রমাণ করেছেন যে, FD বৃত্তে অন্তর্লিখিত সুষম দশমভুজের একটি বাহু ও বৃত্তে অন্তর্লিখিত সুষম পঞ্চভুজের একটি বাহু BF-এর সমান হবে। কিন্তু ED=30 একক এবং BD=60 একক। অতএব,—

২. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times— M. Kline. Page—122

$$EB^2 = ED^2 + BD^2$$

বা, $EB^2 = 30^2 + 60^2 = 4500$

$\therefore$ $EB = 67'4'55''$

এখন, $EB = EF$; সুতরাং EF জানা গেল।

অতএব, $FD = EF - DE$

$= 67'4'55'' - 30 = 37'4'55''$

FD দশমভুজের বাহু বলে 36° চাপের জ্যা $= 37'4'55''$

অ্যালমাজেস্ট গ্রন্থে বিখ্যাত টলেমী উপপাদ্যটি দেখতে পাওয়া যায়। প্রথমত এটি টলেমীর লেমা নামে অভিহিত ছিল, কিন্তু অধুনা এটিকে উপপাদ্য বলা হয়।

উপপাদ্য ঃ বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের কর্ণ দ্বারা উৎপন্ন আয়তক্ষেত্র চতুর্ভুজের বিপরীত বাহু দ্বারা উৎপন্ন দুইটি আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

অর্থাৎ ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ হলে,

$$AC.BD = AB.DC + AD.BC$$

টলেমীর গবেষণা থেকে নিম্নরূপ ত্রিকোণমিতিক সূত্রগুলি জানা যায় ঃ

(a) $\sin(A+B)$; (b) $\sin(A-B)$

মেনেলাস-এর (Menelaus) গোলীয় ত্রিভুজ (Spherical triangle) সংক্রান্ত উপপাদ্যের প্রয়োগ টলেমীর গ্রন্থে দেখা যায়। বস্তুত, তিনি বহুল পরিমাণে মেনেলাস কর্তৃক প্রভাবিত হয়েছেন বলা যায়। গোলীয় ত্রিভুজের ক্ষেত্রে C কোণ সমকোণ হলে এবং A কোণের বিপরীত চাপ a হলে,

$$\sin a = \sin c \sin A$$

$$\tan a = \sin b \tan A$$

$$\tan b = \tan c \cos A$$

$$\cos c = \cos a \cos b$$

গণিতের ইতিহাসে অ্যালমাজেস্টের গুরুত্ব কম নয়। এই গ্রন্থে ত্রিকোণমিতির একটি দৃঢ় ভিত্তিভূমি দেখা যায়। প্রধানত গোলীয় ত্রিকোণমিতি আলোচনার বিষয়বস্তু হলেও টলেমী সামতলিক ত্রিকোণমিতির অনুশীলনও করেছেন। কেবল অ্যালমাজেস্ট নয়, ভূগোল ও আলোক বিজ্ঞান সংক্রান্ত গ্রন্থও তিনি রচনা করেছিলেন। ইউক্লিডের সমান্তরাল সম্পর্কিত স্বতঃসিদ্ধটি তিনি সমর্থন করেননি। কিন্তু সমস্যার সমাধান দিতেও পারেননি। প্রায় দু-হাজার বছর ধরে তা নিয়ে নানা সময়ে বিতর্ক হয়েছে, কিন্তু সফল কেউ হননি। এ-বিষয়ে লোবাচেভস্কি, বোলয়াই ও গাউসের গবেষণা কোন সময় আলোচিত হবে।

ত্রয়োদশ অধ্যায়

নিকোম্যাকাস

(খ্রীস্টীয় 100 শতাব্দী)

"Mathematics is the Queen of the Sciences, and Arithmetic the Queen of Mathematics".

C. F. Gauss

পীথাগোরীয় সম্প্রদায় সংখ্যাতত্ত্বের ওপর গবেষণা করেছিল। কিন্তু প্লেটোনীয় সম্প্রদায় গণিতে বিমূর্ততার প্রতি অধিক গুরুত্ব আরোপ করায় জ্যামিতিক গবেষণা ও চর্চা বিশেষ মর্যাদা ও গুরুত্ব পায়। খুব সম্ভব রীতি ও ঐতিহ্য রক্ষা করার জন্য ইউক্লিড সংখ্যাতত্ত্বের ওপর কিঞ্চিৎ গবেষণা করেছিলেন। ইউক্লিডের পর প্রায় 400 বছর ধরে গ্রীকরা পাটীগণিতের প্রতি মোটেই আকৃষ্ট ছিল না। ইরাটোস্থেনিস (**Eratosthanes**) অবশ্য মৌলিক সংখ্যা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে **চালুনি পদ্ধতি** (**Seive Method**) আবিষ্কার করেন। হিপসিকলস (**Hypsicles**) খ্রীস্টপূর্ব শতাব্দীতে **বহুভুজ সংখ্যা ও সমান্তর শ্রেণী** নিয়ে গবেষণা করেছিলেন। ইউক্লিড তাঁর এলিমেণ্টস গ্রন্থে এই দুইটি বিষয় অন্তর্ভুক্ত করেননি। সমান্তর শ্রেণীর গবেষণায় হিপসিকলসের কৃতিত্ব অধিক। কিন্তু তাঁর পর আরো দু-শ' বছর ধরে গ্রীকদের পাটীগণিত চর্চা দেখা যায় না। খ্রীস্টীয় প্রথম শতাব্দীতে প্রথম যে গণিতজ্ঞ এই বিষয়ের ওপর গবেষণা ও গ্রন্থ রচনা করেন, তিনি নিকোম্যাকাস।

নিকোম্যাকাসের পরিচয়

নিকোম্যাকাস সম্বন্ধে কিছুই জানা যায় না। তবে ঐতিহাসিকরা অনুমান করেন, তিনি গ্রীক ছিলেন না। যে দু-একজন অগ্রীক গণিতজ্ঞ গ্রীক গণিতে অসামান্য কৃতিত্ব দেখিয়েছেন, তিনি তাঁদের অন্যতম। ইতিমধ্যে আমরা টলেমীর উল্লেখ করেছি। জেরুজালেম থেকে উত্তর-পূর্বে প্রায় পঞ্চাশ-ষাট মাইল দূরে জেরাস-এ (**Jerash**) বা জেরাসায় (**Gerasa**) জন্মগ্রহণ করে থাকবেন তিনি। অনুমান করা হয় তিনি আরব দেশের মানুষ।

তিনি নব্য পীথাগোরীয় সম্প্রদায়ভূক্ত ছিলেন। আর ওই সময় আলেকজান্দ্রিয়ায় পীথাগোরীয় সম্প্রদায়ভূক্ত দার্শনিকদের আবির্ভাব ঘটে। এই নব্য সম্প্রদায় পীথাগোরাসের দার্শনিক ভাবনা ও চিন্তার উন্মেষ ঘটাবার প্রয়াস পেয়েছিল। নিকোম্যাকাসের পাটীগণিত গ্রন্থের বহুস্থানে পীথাগোরীয় তত্ত্বের প্রত্যক্ষ প্রভাব দেখা যায়। এইসব থেকে অনুমিত হয় তিনি এই সম্প্রদায়ের দার্শনিক তত্ত্বের

সঙ্গে পরিচিত হওয়ার জন্য আলেকজান্দ্রিয়ায় এসেছিলেন। বস্তুত, দর্শনের প্রতি যেন তাঁর অধিক আকর্ষণ ছিল। তাঁর পাটীগণিত সংক্রান্ত গ্রন্থটি প্রকৃতপক্ষে গণিতবিজ্ঞানের মধ্যে পড়ে কিনা সন্দেহ ; একে পাটীগাণিতিক দর্শনের ভূমিকা হিসাবে গণ্য করা সঙ্গত বলে পণ্ডিতরা মনে করেন। নানা মুনির নানা মত,—তাঁর গ্রন্থের গাণিতিক মূল্য কম নয়।

দীর্ঘদিন ধরে গ্রীক গণিতের সবকিছুই জ্যামিতিক পটভূমিকায় বিশ্লেষিত ও ব্যাখ্যাত হতো। কিন্তু নিকোম্যাকাসের *Introductio Arithmetica* এসব থেকে মুক্ত। গ্রীকদের চেয়ে পৃথক মনন ও চিন্তনের অধিকারী হওয়ায় তাঁর পক্ষে লৌহকপাটের বাইরে আসা সম্ভব হয়েছিল বলে মনে হয়। বিখ্যাত এক গণিতের ঐতিহাসিক ইউক্লিডের সঙ্গে তাঁর তুলনা করে বলেছেন,—**"Instead of drawing lines like Euclid, he illustrates things by real numbers."**[১] কেবল গ্রীক যুগেই নয়, তার পরবর্তী অনেকদিন পর্যন্ত **Introductio** উত্তরসূরী গণিতজ্ঞদের ওপর প্রভাববিস্তার করতে সমর্থ হয়েছিল। এই গ্রন্থের নানা ভাষ্য দেখা যায়, আর প্রায় সবাই একবাক্যে নিকোম্যাকাসের প্রশংসা করেছেন। বোয়েথিয়াস এই গ্রন্থের ল্যাটিন অনুবাদ করেন ; লুসিয়ানের একটি উক্তি তো কিংবদন্তীতে পরিণত হয়েছিল ঃ **"You reckon like Nichomachus of Gerasa".** কিন্তু সত্যসত্যই নিকোম্যাকাস গণনা বা **reckon**-এ পটু ছিলেন কিনা আমরা জানিনা,—তেমন কোন প্রমাণও নেই। তবে তিনি গণনা বা হিসাবে প্রত্যুৎপন্নমতিত্ব বা ম্যাজিক দেখান আর নাই দেখান, তাঁর **Introductio**-র উপাদান, পরিবেশিত তত্ত্ব ও তথ্যাদি মৌলিক হোক আর নাই হোক, গণিতের ইতিহাসে নিকোম্যাকাস একটি নাম,—বিশেষত পাটীগণিতের ইতিহাসে একটি উজ্জ্বল নাম। পাটীগণিতের ক্রমবিকাশ ও সমৃদ্ধিতে তাঁর অবদান শ্রদ্ধার সঙ্গে স্মরণীয়।

পাটীগণিতে অবদান

ইউক্লিড সংখ্যা বোঝাতে বর্ণ বা অক্ষর ব্যবহার করেছেন,—কখনো বা একটি অক্ষর কখনো বা দুটি অক্ষর। শেষেরটিতে রেখাংশ সূচিত হয়েছে। কিন্তু নিকোম্যাকাস এই রীতির পরিবর্তন করে তাঁর গ্রন্থে সর্বত্র শব্দ ব্যবহার করেছেন। এতে যে গণিতে খুব সুবিধা হয়েছিল, তা বলা যায় না। বরং এতে জটিলতা বৃদ্ধি পেয়েছে, আর অপরিচ্ছন্ন হয়ে উঠেছে। তিনি কেবল অখণ্ড সংখ্যা ও অখণ্ড সংখ্যার অনুপাত নিয়ে আলোচনা করেছেন তাঁর **Introductio** গ্রন্থে।

প্লেটো পাটীগণিত, জ্যামিতি, সঙ্গীত ও জ্যোতির্বিজ্ঞান এই চারটি বিষয় প্রধান বলে উল্লেখ করেছেন। কিন্তু নিকোম্যাকাসের মতে পাটীগণিত হচ্ছে অন্যগুলির

১. A History of Mathematics—F. Cajori, Page—72

মাতৃস্বরূপা। পাটীগণিত থেকে অন্যগুলির উৎপত্তি হতে পারে বলে তা প্রধান। তাঁর মতে "This is not solely because we said that it existed before all the others in the mind of the creating God like some universal and exemplary plan, relying upon which as a design and archetypal example the creator of the universe sets in order his material creations and makes them attain to their proper ends; but also because it is naturally prior in birth..."[২] বস্তুত, পাটীগণিত অন্যসব বিজ্ঞানেই অপরিহার্য। কারণ, তা না হলে ওইসব বিজ্ঞানের অস্তিত্ব বিপন্ন হয়ে পড়ে। তিনি বলেন, অন্য সব বিজ্ঞান না থাকলেও বা ধ্বংস হয়ে গেলেও পাটীগণিত কখনো ধ্বংস হবেনা, লোপ পাবেনা,—চিরকাল, অনন্তকাল থাকবে।

প্রচলিত গ্রীক গণিতের স্বভাব ও বৈশিষ্ট্যের সঙ্গে **Introductio**-র একটি প্রধান বৈসাদৃশ্য লক্ষ করার মত। গ্রীক গণিতজ্ঞরা প্রধানত অবরোহী পদ্ধতির ওপর গুরুত্ব আরোপ করতেন। কিন্তু নিকোম্যাকাস তাঁর পাটীগাণিতক আলোচনায় আরোহী পদ্ধতির ওপর গুরুত্ব আরোপ করেছেন। আর এই পদ্ধতির সাহায্যে সিদ্ধান্তে উপনীত হয়েছেন। ফলে,—এই পদ্ধতির জন্য সংখ্যা ও সঙ্কেতের প্রয়োজন একান্তভাবে উপলব্ধ হতে থাকে। এ সম্পর্কে গ্রীক গণিতের অন্যতম বিখ্যাত ঐতিহাসিক **J. Gow**-এর উক্তি উদ্ধৃত করার আগে একটি ছোট্ট উদাহরণ নেওয়া যাক। যেমন,—5-এর বর্গ, ঘন বা যে-কোন ঘাত নির্ণয় করলে যে সংখ্যাই পাওয়া যাক না কেন তার এককের ঘরে সব সময় 5 সংখ্যা থাকবে। জ্যামিতিক ধারণার সাহায্যে এই বিষয়টি বোঝানো কোন ক্রমেই সম্ভব নয়। বস্তুত-পক্ষে আরোহী পদ্ধতি অবলম্বন করার জন্যই গণিতে সাঙ্কেতিকতা অনুপ্রবেশ করতে থাকে। এ সম্পর্কে **J. Gow** বলেন, "The Euclidean symbolism would not show, for instance, that all the powers of 5 end in 5 or that the square numbers are the sums of the series of odd numbers. What was wanted, was a symbolism similar to the ordinary numerical kind, and thus inductive arithmetic led the way to algebra."

আগেই উল্লেখ করা হয়েছে, **Introductio** পীথাগোরীয় পাটীগণিতিক তত্ত্বের ওপর প্রতিষ্ঠিত। এই গ্রন্থে **যুগ্ম ও অযুগ্ম সংখ্যা, বর্গ সংখ্যা, আয়তনিক সংখ্যা, বহুভুজ সংখ্যা, মৌলিক সংখ্যা, যৌগিক সংখ্যা ও চৌপলী সংখ্যা-র** (parallelopipedal) সংজ্ঞা ও আলোচনা আছে।

---

২. উদ্ধৃতিটি Kline-এর Mathematical Thought from Ancient to Modern Times গ্রন্থ থেকে গৃহীত।

নামতা প্রাচীন ব্যাবিলন ও মিশরে দেখা যায়। নিকোম্যাকাস 1 থেকে 9-এর ঘর পর্যন্ত গুণনের নামতার তালিকা দিয়েছেন।

পীথাগোরীয় সম্প্রদায়ের অনেক প্রতিপাদ্যের পুনরাবৃত্তি তাঁর গ্রন্থে দেখা যায়। যেমন,—যে-কোন দুইটি ক্রমিক ত্রিভুজসংখ্যার সমষ্টি বর্গসংখ্যা। তিনি দেখিয়েছেন, n-তম ত্রিভুজসংখ্যা, n-তম বর্গসংখ্যা, n-তম পঞ্চভুজসংখ্যা ইত্যাদি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে এবং এদের সাধারণ অন্তর (n – 1)-তম ত্রিভুজসংখ্যা।

Introductio-র আলোচিত উপাদানসমূহের অনেকাংশ মৌলিক না হলেও এই গ্রন্থের ইতস্তত বিক্ষিত তত্ত্বাদির মধ্যে নিকোম্যাকাসের মৌলিকত্ব লক্ষ করা যায়। যেমন,—পর পর দুইটি অযুগ্ম সংখ্যার সমষ্টি সর্বদাই ঘন সংখ্যা হবে, এই প্রতিজ্ঞাটি তাঁর মৌলিক আবিষ্কার। অযুগ্ম সংখ্যাগুলি এভাবে লিখলে 1 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19,.........এর প্রথমটি 1-এর ঘন; পরের দুটির সমষ্টি (3+5) 2-এর ঘন; পরের তিনটির সমষ্টি (7+9+11) 3-এর ঘন ইত্যাদি। অর্থাৎ

(a) $1=1^3=1$

(b) $3+5=2^3=8$

(c) $7+9+11=3^3=27$

(d) $13+15+17+19=4^3=64$

প্রসঙ্গত উল্লেখযোগ্য, এই প্রতিপাদ্যটি পরবর্তীকালে ঘনসংখ্যার সমষ্টি নির্ণয়ে বিশেষ সহায়তা করেছিল। সেইজন্যই বোধ হয় বলা হয়, গণিতে একক ও স্বয়ম্ভূ আবিষ্কার বা উদ্ভাবন প্রায় নেই বললেই চলে।

সম্পূর্ণ সংখ্যা (Perfect number) বিষয়ে তাঁর গবেষণা এবং এই সম্পর্কে তাঁর উক্তি সুবিদিত। তিনি 6, 28, 496 ও 8128 এই চারিটি সম্পূর্ণ সংখ্যা আবিষ্কার করেছিলেন। এবং পরের সম্পূর্ণ সংখ্যা আবিষ্কারে বিফল হয়ে বলেছিলেন, the good and the beautiful are rare and easily counted but the ugly and bad are prolific." বলা বাহুল্য, উক্তিটি গভীর দার্শনিক তাৎপর্য ও ইঙ্গিত বহন করে।

নানা ধরনের অনুপাতের শ্রেণীবিভাগ ও নামকরণ নিকোম্যাকাসের আর একটি কৃতিত্ব। তাঁর আলোচনায় অন্যান্য বহু ধরনের অনুপাতের সঙ্গে এই অনুপাতগুলিও দেখা যায়ঃ

$m+1 : m,\quad 2m+n : m+n$ এবং $mn+1 : n$

এই অনুপাতগুলি সঙ্গীতের ক্ষেত্রে বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ বলে বিবেচিত হয়। শুধু অনুপাতই নয়, সমানুপাত সম্পর্কেও তাঁর গবেষণা আছে। তিনি মনে করেন, প্রাকৃতিক বিজ্ঞান, সঙ্গীত, গোলীয় ত্রিকোণমিতি, বিশেষত প্রাচীন গণিতজ্ঞদের

রচনাবলী পাঠে সমানুপাতের গুরুত্ব অত্যধিক। বহু ধরনের সমানুপাতের আলোচনার মধ্যে তাঁর সাঙ্গীতিক সমানুপাত (**musical proportion**) এই রকম ঃ

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b$$

প্রারম্ভেই আমরা ইরাটোস্থেনিসের চালুনি পদ্ধতির উল্লেখ করেছি। নিকোম্যাকাসও তাঁর গ্রন্থে এই পদ্ধতি দিয়েছেন। অনেকেই জানেন, এই পদ্ধতির সাহায্যে অতি সহজে মৌলিক সংখ্যা নির্ণয় করা যায়। পরে ইরাটোস্থেনিস আলোচনা প্রসঙ্গে এই পদ্ধতির সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দেওয়া হবে।

মূল্যায়ন ও উত্তরসূরী

সামান্য পুনরাবৃত্তি হলেও নিকোম্যাকাস সম্পর্কে কয়েকটি কথা পৃথকভাবে বলতে হয়। **Introductio**-তে আরোহী পদ্ধতির ব্যবহার গ্রীকগণিতে নতুন সম্ভাবনার দ্বার উন্মুক্ত করেছিল। বিশেষ বিশেষ সংখ্যার উদাহরণের সাহায্যে সমানুপাত ও অন্যান্য বিষয়ের আলোচনা সীমাবদ্ধতা প্রমাণ করলেও এতে জ্যামিতিক ধারণার আধিপত্য ক্রমশ ক্ষুণ্ণ হতে থাকে এবং ধীরে ধীরে গণিতে সাঙ্কেতিকতা অনুপ্রবিষ্ট হয়। সে-কারণেই ডায়োফ্যাণ্টাসের মত গণিতজ্ঞের উদ্ভব, বিকাশ ও পরিণতি সম্পাদন সম্ভব হয়। থিওন (**Theon**), আয়ামব্লিকাস (**Iamblichus**) প্রমুখ গণিতজ্ঞরা তাঁর পথ অনুসরণ করে পাটীগণিতে সাফল্য অর্জন করতে থাকেন।

Introductio Arithmetica অধিক পরিমাণে মৌলিকতা দাবী না করতে পারলেও গ্রন্থটির বিষয়সূচী ব্যাপক, ক্রমানুসারে সজ্জিত ও পারম্পার্যময়। এই গ্রন্থের কল্পনা, সৌন্দর্য, রহস্যবাদ ও অধ্যাত্মগুণসম্পন্ন সংখ্যার আলোচনা পরবর্তী-কালে সুদূরপ্রসারী প্রভাব বিস্তার করেছিল। সর্বোপরি, তাঁর সময় থেকে আলেকজান্দ্রিয়ায় জ্যামিতির পরিবর্তে পাটীগণিত অতীব প্রিয় বিষয় হিসাবে পরিগণিত হতে থাকে। এটাই বোধ করি নিকোম্যাকাসের সর্বাধিক কৃতিত্ব।

চতুর্দশ অধ্যায়

ডায়োফ্যাণ্টাস

(আনুমানিক 250-330 খ্রীস্টাব্দ)

"Algebra is the intellectual instrument for rendering clear the quantitative aspects of the world."

A. N. Whitehead

গ্রীক গণিতের ইতিহাসে ডায়োফ্যাণ্টাস একক, অনন্য। তিনি নিঃসঙ্গ পথিক, তাঁর প্রকৃত পূর্বসূরী ও উত্তরসূরী নেই বললেই চলে। বস্তুত, বীজগণিতের স্বরূপ ও প্রকৃতি গ্রীক-মনের অনুকূল ছিলনা।* গ্রীক সমাজচেতনা গণিতের এই শাখার বিকাশসাধনে পরিপন্থী ছিল বলে ঐতিহাসিকরা যে অনুমান করেন, তার যথেষ্ট মূল্য আছে। অপরপক্ষে, প্রাচীন ভারতীয় সমাজচেতনা এই শাখার বিকাশ ও উন্নতিতে বাধা হয়ে দাঁড়ায়নি। তাই প্রাচীন ভারতের শুল্ব যুগে, এমন কি আরো পূর্বে বীজগণিতের উদ্ভব হয়েছে এবং ক্রমে ক্রমে সঙ্কেত ও চিহ্ন ব্যবহার করার রীতি গড়ে উঠেছে। ডায়োফ্যাণ্টাসের সমসাময়িককালে রচিত **বকশালী পাণ্ডুলিপি**-তে সঙ্কেতসহ সমীকরণ লিখনের নমুনা দেখতে পাওয়া যায় যা ডায়োফ্যাণ্টাসের চেয়ে উন্নত।**

ডায়োফ্যাণ্টাসের পূর্বে যে গ্রীক বীজগণিতের পরিচয় পাওয়া যায়, তা প্রধানত ধাঁধা সমন্বিত। সাধারণত তা নানা সমস্যার আকারে দেখা দিত, এবং সমাধানের জন্য বীজগণিতের কৌশল বা টেকনিক ব্যবহৃত হতো। মিশরীয় **রাইণ্ড প্যাপিরাস**-এ যে ধরনের সমস্যা আছে, এগুলিও প্রধানত সেই ধরনের। এসবের বিবৃতি ও সমাধানে সঙ্কেত ও চিহ্ন ব্যবহৃত হতো না। দশম শতাব্দীর **Palatine Codex of Greek Epigrams**-এ এরকম পঞ্চাশ-ষাটটি সমস্যা বা ধাঁধা দেখতে পাওয়া যায়। ঐতিহাসিকরা মনে করেন, এর তিরিশটি পঞ্চম শতাব্দীর **মেট্রোডোরাস**-এর (**Metrodorus**) লেখা। কিন্তু তা হলেও এগুলি আরো প্রাচীন। ইতিপূর্বে আমরা আর্কিমিডিসের **গবাদি সমস্যা**-র (*cattle problem*) উল্লেখ করেছি। এরকম আরো অনেক ধাঁধা আছে যাতে বীজগণিতের প্রয়োগ অবধারিত ছিল। ইউক্লিডের *Mule and donkey* সমস্যা, নল দ্বারা চৌবাচ্চা

---

* "...গ্রীক গণিতের একটি বৈশিষ্ট্য হলো এর বিমূর্ততা এবং বাস্তব কার্যক্ষেত্র থেকে এর দূরত্ব। এটা ঘটবার বড় কারণ হলো প্রাচীন গ্রীসের অর্থনৈতিক ব্যবস্থার ভিত্তি ছিল দাস প্রথা এবং বাস্তব কাজের অধিকাংশকে বুদ্ধিজীবীদের মর্যাদা-হানিকর বলে গণ্য করা হতো।" 'বিজ্ঞান ও মার্কসীয় দর্শন', পৃ—২৮-২৯।

** এ বিষয়ে লেখকের 'প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিবৃত্ত' পৃ—৫১-৬০ দ্রষ্টব্য।

ভর্তি করা তার দু-একটি উদাহরণ। বয়স নির্ণয়ের সমস্যা সব দেশেরই একটি অতীব আকর্ষণীয় সমস্যা। এই বিষয় নিয়েও গ্রীকদের ধাঁধা ছিল। ডায়োফ্যাণ্টাস তাঁর নিজের জীবনের দু-একটি ঘটনা, আর তাঁর বয়স তো ধাঁধার আকারে সমাধি-লিপিতে দিয়েছেন। পরে আমরা এ-বিষয়ে আলোচনা করব।

গ্রীক বীজগণিতের আদিপর্ব যেন অবসর বিনোদনের। জ্যামিতির প্রতি অত্যধিক গুরুত্ব আরোপ করায় এবং প্রতিভাশালী গ্রীক গণিতজ্ঞরা বীজগণিতের প্রতি আকৃষ্ট না হওয়ায় এর উন্নতি গ্রীকদের হাতে হয়নি। এ-বিষয়ে বিশ্বগণিতে প্রাচীন ভারতীয় গণিতজ্ঞ ও আরব গণিতজ্ঞরা বিশেষ অবদান রেখে গেছেন। কিন্তু একথা ভুললে চলবেনা যে, আরবদের বীজগণিত ও সংখ্যা-লিখনে হাতে-খড়ি ভারতীয়দের হাতে।

ডায়োফ্যাণ্টাসের জীবনকাহিনী

বিশ্বের তাবৎ প্রাচীন গণিতজ্ঞদের ক্ষেত্রে যে কথা প্রযোজ্য, ডায়োফ্যাণ্টাসের ক্ষেত্রেও সেইকথা প্রযোজ্য যে, তাঁর ব্যক্তিজীবন সম্বন্ধে আমরা কিছুই জানিনা। কোন কোন গ্রীক গণিতজ্ঞের জন্মস্থান ও ব্যক্তিজীবনের টুকরো টুকরো খবর পাওয়া যায় বটে, কিন্তু ডায়োফ্যাণ্টাসের জন্মস্থান ও জীবনবৃত্তান্ত কিছু জানতে পারা যায় না। কোন কোন ঐতিহাসিক মনে করেন, তিনি গ্রীক, আবার কোন কোন ঐতিহাসিকের মতে তিনি হেলেনাইজড ব্যাবিলনীয়। এসবের যে প্রত্যক্ষ প্রমাণ আছে, তা নয়। তাঁর গ্রন্থে আলোচিত গণিতের বিষয়বস্তু, তার প্রকৃতি ও স্বরূপ সম্পর্কে আলোচনা করে ঐতিহাসিকরা এরূপ অনুমান করেছেন। ডায়োফ্যাণ্টাস যে খ্রীস্টীয় তৃতীয় শতাব্দীতে বর্তমান ছিলেন, এই অনুমান যথার্থ বলে মনে হয়। কারণ, তাঁর পূর্বের গণিতজ্ঞ **নিকোম্যাকাস** ও **স্মার্নার থিওনের** লেখায় তাঁর উল্লেখ নেই, কিন্তু আলেকজান্দ্রিয়ার **থিওন** ও তাঁর কন্যা **হাইপেসিয়া**-র লেখায় তাঁর উল্লেখ আছে। হাইপেসিয়া তো ডায়োফ্যাণ্টাসের বীজগণিতের ভাষ্য রচনাও করেছিলেন। সুতরাং ডায়োফ্যাণ্টাস দ্বিতীয় ও চতুর্থ শতাব্দীর মধ্যবর্তী তৃতীয় শতাব্দীতে বর্তমান ছিলেন,—এরূপ ধারণা করা মোটেই অযৌক্তিক নয়।

ইতিপূর্বে আমরা তাঁর **সমাধি লিপি**-র কথা উল্লেখ করেছি। তাঁর এই সমাধি-লিপি থেকে জানা যায়, তিনি 84 বৎসর জীবিত ছিলেন। সমাধি-লিপিটি এরকম ঃ

"ডায়োফ্যাণ্টাসের জীবনের $\frac{1}{6}$ অংশ শৈশবকাল, $\frac{1}{12}$ অংশ যৌবনকাল এবং আরো $\frac{1}{7}$ অংশ অকৃতদার অবস্থা ; বিবাহের 5 বছর পর তাঁর পুত্রসন্তান জন্মে, আর তাঁর মৃত্যুর 4 বছর পূর্বে পুত্রটির মৃত্যু হয়। তখন পুত্রের বয়স ছিল পিতার বয়সের অর্ধেক।"

বলা বাহুল্য, এটি একটি বীজগাণিতিক সমীকরণ ব্যতিরেকে আর কিছু নয়। এই লিপি থেকে এইটুকু অনুমান করা যায় যে, ডায়োফ্যাণ্টাস বীজগাণিতিক সমীকরণের স্বরূপ ও প্রকৃতি এবং সৌন্দর্য এবং গাণিতিক সমস্যা সমাধানে তার গুরুত্ব সম্বন্ধে সম্পূর্ণ সচেতন ছিলেন এবং তাঁর জীবনের গাণিতিক সাধনা নানা ধরনের সমীকরণ সমাধানের মধ্যে নিহিত ছিল।

আধুনিক বীজগণিতের ভাষায় সমাধি-লিপিটি প্রকাশ করলে এরূপ হয়ঃ

$$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$$

গ্রন্থাদির সংক্ষিপ্ত বিবরণ

ডায়োফ্যাণ্টাস বহু গ্রন্থের রচয়িতা বলে অনুমান করা হয়। কিন্তু তাঁর সব গ্রন্থ কালের গ্রাস এড়িয়ে আমাদের কাল পর্যন্ত এসে পৌঁছায়নি। তাঁর দুটি গ্রন্থের নামটি ছাড়া আর সব অবলুপ্ত, আর তাঁর *Porisms* নামক গ্রন্থটির বিষয়বস্তু, তাও আবার আংশিকভাবে আমরা জানি। *On Polygonal Numbers* নামক গ্রন্থটির সামান্য অংশ কালের গ্রাস থেকে রক্ষা পেয়েছে। এই গ্রন্থটি ইউক্লিডের সুবিখ্যাত **এলিমেণ্টস**-এর সপ্তম, অষ্টম এবং নবম খণ্ডের মত অবরোহী পদ্ধতিতে রচিত। কিন্তু বিষয়বস্তু বা তত্ত্বের আলোচনার মধ্যে নতুনত্ব বা অভাবনীয় কিছু নেই,—গতানুগতিক ঐতিহ্যানুসরণ বললে অত্যুক্তি হয় না।

তাঁর সর্বশ্রেষ্ঠ গ্রন্থ *Arithmetica* ; তাঁর প্রতিভা ও কর্মকৃতির মূর্ত উদাহরণ। কিন্তু দুর্ভাগ্যের বিষয়, এই গ্রন্থের সব খণ্ডগুলি পাওয়া যায় না। এলিমেণ্টস-এর মত **Arithmetica**-ও তেরো খণ্ডে রচিত হয়েছিল। কিন্তু বর্তমানে মাত্র ছ'টি খণ্ড পাওয়া যায়।

গ্রন্থটিকে একটি সঙ্কলন গ্রন্থ বলা যেতে পারে। মিশরীয় **রাইণ্ড প্যাপিরাস** ও প্রাচীন ভারতের **বকশালী পাণ্ডুলিপি**-র সঙ্গে এই গ্রন্থের কিছুটা মিল দেখতে পাওয়া যায়। বকশালী পাণ্ডুলিপি রচনার মূল উদ্দেশ্য যেমন জনৈক ব্রাহ্মণ সন্তানের গণিত শিক্ষা, তেমনি ডায়োফ্যাণ্টাসও **Arithmetica** রচনা করেছিলেন তাঁর কোন ছাত্রকে বীজগণিত শেখানোর জন্য। বস্তুত, এই গ্রন্থটির চরিত্র আধুনিক পাঠ্যপুস্তকের মত। তবে এই পাঠ্যপুস্তক বাজারে পাঠ্যপুস্তক নয়, বলাই বাহুল্য। পরিকল্পনা, মৌলিকতার সঙ্গে আছে প্রতিভার যাদুস্পর্শ। তাই পাঠ্যপুস্তকধর্মী হলেও **Arithmetica** গ্রীক গণিতের ইতিহাসে একক ও অনন্য। এই গ্রন্থে মোট 189 টি সমস্যা আছে এবং প্রত্যেক সমস্যার জন্য পৃথক পৃথক সমাধান পদ্ধতি দেওয়া হয়েছে।

অ্যারিথমেটিকার বৈশিষ্ট্য ও বিষয়বস্তুর সংক্ষিপ্ত বিবরণ

গণিতের উন্নতি ও প্রগতি যথাযথ সঙ্কেত ও চিহ্ন ব্যবহারের ওপর যে কিছুটা

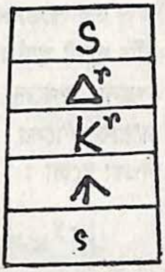
নির্ভরশীল, তা অস্বীকার করা যায় না। বীজগাণিতিক গবেষণায় ডায়োফ্যাণ্টাসের মহত্তম কৃতিত্ব হচ্ছে এই গ্রন্থে তিনি **গাণিতিক সঙ্কেত** ব্যবহার করেছেন। তবে তিনি প্রকৃতপক্ষে কোন ধরনের কি কি সঙ্কেত ও প্রতীক ব্যবহার করেছিলেন, তা আজ আর জানার উপায় নেই। কারণ, তাঁর গ্রন্থটির মূল পাণ্ডুলিপির সন্ধান পাওয়া যায় না ; আমরা যা পেয়েছি তা অনেক পরবর্তীকালের অনুলিপিকারদের। কিন্তু তাঁর প্রবর্তিত ও ব্যবহৃত সঙ্কেত নিয়ে সামান্য আলোচনার আগে বীজগণিতের ঐতিহাসিক বিবর্তনে সঙ্কেত ব্যবহারের স্তর সম্পর্কে দু-একটি কথা বলতে হয়।

বীজগণিতের উদ্ভবের প্রাথমিক বা আদিস্তরে সঙ্কেতের ব্যবহার দেখা যায় না। আদিস্তরে সঙ্কেতের পরিবর্তে ভাষা ব্যবহৃত হতো। গ্রীক যুগে এই ধারা ডায়োফ্যাণ্টাসের পূর্বেও দেখা যায়, আর পরেও প্রায় পঞ্চদশ শতাব্দী পর্যন্ত ইউরোপে দেখা যায়। বীজগণিতের ভাষায় এই স্তরকে **আলঙ্কারিক** (Rhetorical) স্তর বলা হয়। দ্বিতীয় স্তরটিকে **শব্দ-সংক্ষেপ** (Syncopation) স্তর বলা হয়। অর্থাৎ এই স্তরে সম্পূর্ণ একটি শব্দ ব্যবহৃত হতো না। তার পরিবর্তে শব্দের সংক্ষিপ্ত রূপ ব্যবহৃত হতো। প্রাচীন ভারতীয় গণিতে এই ধারা দীর্ঘদিন প্রচলিত ছিল,—মধ্যযুগের শেষ পর্যন্ত অব্যাহত ছিল। ডায়োফ্যাণ্টাসও এই পদ্ধতি ব্যবহার করেছেন। তৃতীয় স্তরে বীজগণিতে **সঙ্কেত** (Symbol) ব্যবহৃত হতে থাকে, আর তখন থেকেই গণিতে প্রাণ ও শক্তি সঞ্চারিত হয়। বলা বাহুল্য, এটিই আধুনিক পদ্ধতি।

নাম ও সঙ্কেত

প্রাচীন ভারতে 300 খ্রীস্টপূর্বাব্দে রচিত জৈন সাহিত্য **স্থানাঙ্গ সূত্র** গ্রন্থে অজ্ঞাত রাশি অর্থে **যাবৎ-তাবৎ** শব্দের ব্যবহার দেখা যায়। খ্রীস্টীয় তৃতীয় শতাব্দীর **বকশালী পাণ্ডুলিপি**-তে **'যদৃচ্ছা'**, **'বাঞ্ছা'**, **'কামিক'**, শব্দও অজ্ঞাত রাশির পরিবর্তে ব্যবহৃত হতে থাকে। ডায়োফ্যাণ্টাস তাঁর গ্রন্থে অজ্ঞাত রাশিকে **সমস্যার সংখ্যা** ("the number of the problem") বলেছেন। এবং এরূপ অনুমান করা হয় যে, তিনি অজ্ঞাত রাশির জন্য বিশেষ চিহ্ন বা সঙ্কেত ব্যবহার করে থাকবেন। প্রাচীন ভারতে **ঘাত** বা **শক্তি**-র ব্যবহারও খুব প্রাচীন। খ্রীস্টপূর্ব 300 শতাব্দীতে রচিত **উত্তরাধ্যয়ন সূত্র** গ্রন্থে ঘাতের প্রয়োগ আছে। ওই গ্রন্থে দ্বিতীয় ঘাতকে **বর্গ**, তৃতীয় ঘাতকে **ঘন**, চতুর্থ ঘাতকে **বর্গ-বর্গ** এবং ষষ্ঠ ঘাতকে **ঘন-বর্গ** নামে আখ্যাত করা হয়েছে। ডায়োফ্যাণ্টাসের গ্রন্থে ঠিক এই ধরনের ঘাতের নামকরণ যেমন দেখা যায়, আবার প্রতীকের ব্যবহারও দেখা যায়। উদাহরণস্বরূপ, তিনি দ্বিতীয় ঘাতকে **বর্গ** (Square), তৃতীয় ঘাতকে ঘন (Cube) চতুর্থ ঘাতকে **বর্গ-বর্গ** (Square-Square), পঞ্চম ঘাতকে **বর্গ-ঘন** (Square-cube) এবং ষষ্ঠ ঘাতকে **ঘন-ঘন** (cubocube) বলেছেন। 23নং চিত্রে তাঁর প্রবর্তিত ও ব্যবহৃত কয়েকটি সঙ্কেত প্রদত্ত হলো।

সামগ্রিকভাবে গ্রীক গণিতে তিন-এর অধিক ঘাত দেখা যায় না কারণ,—সব কিছু জ্যামিতির ভিত্তিভূমিতে বিচার-বিশ্লেষণ করায় তিন-এর অধিক ঘাতের জ্যামিতিক তাৎপর্য খুঁজে পাননি। ক্লাসিক্যাল গ্রীক যুগেও তিনটি মাত্র উৎপাদকের গুণফল স্বীকৃত ছিল। জ্যামিতির দৃষ্টিভঙ্গীতে যাই হোক, পাটীগণিত ও বীজগণিতের দিক থেকে তিনের অধিক উৎপাদকের তাৎপর্য অস্বীকার করার উপায় নেই। ডায়োফ্যান্টাস এটা ভাল করেই বুঝেছিলেন এবং উপলব্ধি করেছিলেন। তাই, তিনি বীজগণিতের ভিত্তিভূমি জ্যামিতিক ধারণা থেকে সম্পূর্ণ পৃথক এক ধারণার ওপর প্রতিষ্ঠিত করতে সমর্থ হয়েছিলেন। এখানেই তাঁর প্রতিভার মৌলিকতা ও বৈশিষ্ট্য ; আর সেইজন্যই তিনি গ্রীক গণিতে একক ও অনন্য,—গ্রীক সমাজ ও মনের এক আশ্চর্য ব্যতিক্রম !



চিত্র—23

চিহ্ন

চিহ্ন ব্যবহারের ক্ষেত্রে প্রাচীন ভারতীয় গণিতজ্ঞ ও ডায়োফ্যান্টাসের মধ্যে কিছুটা সাদৃশ্য দেখতে পাওয়া যায়। ভারতীয় গণিতে যোগ-চিহ্ন ব্যবহারের যে প্রাচীন রূপ দেখা যায়, তা হলো 'যুত' শব্দের আদ্যক্ষর অর্থাৎ 'যু'। এবং সাধারণ প্রক্রিয়াটি বোঝানো হতো সংখ্যার শেষে বসিয়ে। উদাহরণস্বরূপ,

$$\begin{matrix}0 & 5\ \text{যু} \\ 1 & 1\end{matrix} = x + 5$$

ডায়োফ্যান্টাস যোগ-এর জন্য কোন বিশেষ চিহ্ন ব্যবহার করেননি। তিনি পদগুলিকে পরস্পরের নিকট সান্নিধ্যে বসিয়েছেন। এই নিকট সান্নিধ্য (**juxta-position**) থেকেই প্রক্রিয়ার ইঙ্গিত বুঝে নিতে হয়। নিম্নের উদাহরণটি লক্ষ করলে বোঝা যাবে ঃ

$$\Delta^{Y}\bar{\gamma}\overset{0}{M}\iota\bar{\beta} = x^2.3 + 12$$

চিত্র—24

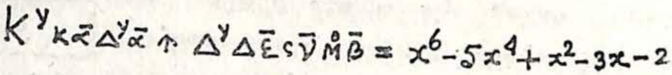
উপরের উদাহরণে $\overset{0}{M}$ এককের চিহ্ন বা প্রতীক এবং পরবর্তী চরম বা ধ্রুবকের অস্তিত্ব সূচিত করছে। আর একটি উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টি স্পষ্ট করা যাক ঃ

$$\Delta^{Y}\bar{\alpha}\varsigma\bar{\beta}\ \overset{0}{M}\bar{\gamma} = x^2 + x.2 + 3$$

চিত্র—25

বিখ্যাত এই গ্রীক গণিতজ্ঞ বিয়োগের চিহ্ন হিসাবে ↑ ব্যবহার করেছেন।

পণ্ডিতগণ মনে করেন গ্রীক বর্গ ψ-কে উল্টো করে লেখা থেকে ↑-চিহ্নের উৎপত্তি। তাঁর রাশিমালা লেখায় দেখা যায়, প্রথমে সব ধনাত্মক পদগুলি বসেছে, মাঝে বিয়োগ-চিহ্নটি আর শেষে ঋণাত্মক পদগুলি। প্রাচীন ভারতের বকশালী পাণ্ডুলিপিতে + চিহ্ন বিয়োগের চিহ্ন হিসাবে ব্যবহৃত হয়েছে। কিন্তু এর সন্তোষজনক ব্যাখ্যা ও কারণ খুঁজে পাওয়া যায় না। যাই হোক, এই রীতি স্থায়ী হয়নি; পরে বিয়োজ্য সংখ্যার উপর বিন্দু (·) বসানো হয়েছে, আবার কখনো কখনো শেষ পদে 'ঋ' এই সংক্ষিপ্ত রূপটি ব্যবহৃত হতেও দেখা যায়।* ডায়োফ্যাণ্টাসের রাশিমালা-লেখন ও ঋণাত্মক চিহ্ন ব্যবহারের একটি নমুনা দেওয়া হলো :



চিত্র—26

অ্যারিথমেটিকা-তে যোগ, গুণ ও ভাগের জন্য কোন চিহ্ন ব্যবহৃত হতে দেখা যায় না। সাধারণ **সহগ**-এর জন্যও কোন চিহ্ন নেই তাঁর গ্রন্থে। তবে অনুমান করা হয়, তিনি এইরূপ **সমতার চিহ্ন** ব্যবহার করে থাকবেন : $\overset{\sigma}{\iota}$

বীজগণিতের ক্রমবিকাশের ইতিহাসে অ্যারিথমেটিকা দ্বিতীয় স্তরের। বলা বাহুল্য, ভারতীয় বীজগণিত বহু পূর্বেই এই স্তরে উন্নীত হয়েছিল। গণিতের ঐতিহাসিকরা বলেন, তাঁর ওপর মিশরীয় ও ব্যাবিলনীয় প্রভাব পড়েছিল,—বিশেষত ব্যাবিলনীয় প্রভাব। কিন্তু এ-বিষয়ে সন্দেহের যথেষ্ট অবকাশ আছে। যাই হোক, সেই বিতর্কে প্রবেশ না করে আমরা এখানে আর একটি বিতর্কের সূত্র দিচ্ছি। ডায়োফ্যাণ্টাসের ওপর কি প্রাচীন ভারতীয় গণিতের প্রভাব পড়া অসম্ভব? ইতিপূর্বে আমরা প্রাচীন ভারতীয় গণিত ও ডায়োফ্যাণ্টাসের মধ্যে কিছু কিছু সাদৃশ্যের আলোচনা করেছি। তাঁর প্রতীক-চিহ্ন ব্যবহার ও সমস্যা সমাধান রীতি থেকে মনে হয় এই ধারণা অসম্ভব না হতেও পারে। কিন্তু তা গবেষণা সাপেক্ষ ও গভীর আলোচনার বিষয়। এবং তা একমাত্র পণ্ডিতদের পক্ষেই সম্ভব।**

বিষয়বস্তুর সংক্ষিপ্ত আলোচনা

বীজগণিত পাটীগণিতের সম্প্রসারিত রূপ। বীজগণিতের সীমা বৃহত্তর, পাটীগণিতের সীমা ক্ষুদ্রতর। বীজগণিতের নিজস্ব বৈশিষ্ট্য থাকলেও এতে পাটীগণিতের বৈশিষ্ট্য আছে। ডায়োফ্যাণ্টাস দুইটি বীজগাণিতিক রাশির সমষ্টি

---

* আগ্রহী পাঠক-পাঠিকারা লেখকের 'গণিতের ললিত পাঠ' ও 'প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিবৃত্ত' গ্রন্থ দুইটি দেখতে পারেন।

** পরিশিষ্টে 'ভারত-গ্রীক সংস্কৃতি সংযোগ' আলোচনা সবিশেষ দ্রষ্টব্য।

বা অন্তরের সঙ্গে অনুরূপ রাশির সমষ্টি বা অন্তরের গুণন সম্পূর্ণ পাটীগাণিতিক পদ্ধতিতে করেছেন। অর্থাৎ $(x-1)(x-2)$ বা $(x+1)(x+2)$ ইত্যাদির গুণনে গ্রীকদের ঐতিহ্যপূর্ণ ও একান্ত প্রিয় জ্যামিতিক পদ্ধতির প্রয়োগ নেই। অ্যারিথমেটিকায় অভেদ-এর (identity) প্রয়োগ আছে অর্থাৎ অভেদ সূত্রের সাহায্যে সমস্যা সমাধান দেখা যায়, কিন্তু এর উল্লেখ কোথাও করেননি। একটি সাধারণ উদাহরণ নিয়ে ব্যাপারটা স্পষ্ট করা যাক। যেমন—

$a=x+2$, $b=x+3$ ধরলে, নিম্নরূপ অভেদের প্রয়োগ তাঁর গ্রন্থে দেখা যায় :

$$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

"সমীকরণ হচ্ছে বীজগণিতের আত্মা ও প্রাণ। বীজগণিতের যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগ ইত্যাদি প্রক্রিয়াগুলি যেন কঙ্কালের শুকনো হাড়, সমীকরণ হচ্ছে রক্ত ও মাংস।"[১] অ্যারিথমেটিকায় নির্ণেয় ও অনির্ণেয় সমীকরণের সমাধান সম্পর্কিত সমস্যাদি দেখা যায়। প্রথম খণ্ডে এক ঘাত নির্ণেয় সমীকরণের আলোচনা আছে। এখানে যে-সব সমস্যা আছে, তাতে একটি অজ্ঞাত রাশি বা একাধিক অজ্ঞাত রাশির ব্যবহার পরিলক্ষিত হয়। সহসমীকরণও দুর্লভ নয়, কিন্তু তার সমাধান পদ্ধতি অদ্ভুত ধরনের। এই প্রসঙ্গে একজন বিখ্যাত গণিতের ইতিহাসকারের মন্তব্য স্মরণ করা যেতে পারে ; "In the solution of simultaneous equations Diophantus adroitly managed with only one symbol for the unknown quantities and arrived at answers, most commonly, by the method of *tentative assumption*, which consists in assigning to some of the unknown quantities preliminary values, that satisfy only one or two of the conditions. These values lead to expressions palpably wrong, but which generally suggest some stratagem by which values can be secured satisfying all the conditions of the problem."[২]

তাঁর গ্রন্থে দ্বিঘাত রাশিমালার সমাধানজনিত সমস্যাও দেখা যায়। কিন্তু কিভাবে তিনি এসবের সমাধান করেছিলেন অর্থাৎ তাঁর সমাধান-পদ্ধতি সম্পর্কে আমরা কিছুই জানি না। এমন কি, দ্বিঘাত রাশিমালার দুইটি বীজ নির্ণয় তো তিনি করেননি-ই, আবার জানতেন কিনা সন্দেহ। ঋণাত্মক বীজের কথা বাদ

১. 'সমীকরণ সমাধানের সহজ পদ্ধতি', নন্দলাল মাইতি, কিশোর জ্ঞান-বিজ্ঞান, ডিসেম্বর, 1982

২. A History of Mathematics—F. Cajori, Page—75

দিলেও যে-সব সমীকরণের দুইটি বীজই ধনাত্মক, তা-ও তিনি দেননি,—একটি-মাত্র দিয়েছেন। এ-বিষয়ে প্রাচীন ভারতীয় গণিতজ্ঞদের কৃতিত্ব গৌরবজনক। উদাহরণস্বরূপ,—$84x^2+7x=7$ এই সমীকরণ সমাধান করে $x=\frac{1}{4}$ এই একটি মাত্র বীজ তিনি দিয়েছেন।[৩] তাঁর গ্রন্থে দ্বিঘাত সমীকরণের নিম্নরূপ তিনটি প্রকার বা রূপ দেখা যায় ঃ

$$(1)\quad ax^2+bx=c$$
$$(2)\quad ax^2=bx+c$$
$$(3)\quad ax^2+c=bx$$

বীজগণিত শিক্ষার মূল কথা সমস্যাকে সমীকরণে প্রকাশ করা, আর তার সমাধান করা। এ-বিষয়ে ডায়োফ্যাণ্টাসের যে বিশেষ ক্ষমতা থাকবে, তা বলাই বাহুল্য। বিশেষত, সমীকরণের ভাঙা-গড়া খেলায় তাঁর পারদর্শিতা লক্ষ করার মত। জটিল সমীকরণের সরাসরি সমাধান না করে তিনি এমন সমীকরণে পর্যবসিত করে নিতেন যা অতি সহজে সমাধান করা যায়। আমরা প্রথমে তাঁর সমীকরণ গঠন সম্পর্কে একটি উদাহরণ তুলে ধরব।

সমস্যা ঃ এমন তিনটি সংখ্যা নির্ণয় কর যার যে-কান দুইটির গুণফলের সঙ্গে সেই দুইটি সংখ্যার সমষ্টি যোগ করলে অন্য প্রদত্ত সংখ্যা হয়। ধর, প্রদত্ত সংখ্যাগুলি 8, 15 এবং 24 ; সংখ্যা তিনটি কত ?

আধুনিক বীজগণিতের ভাষায় সমস্যাটি নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায় ঃ

$$xy+x+y=8 \quad \ldots\ldots(1)$$
$$yz+y+z=15 \quad \ldots\ldots(2)$$
$$zx+z+x=24 \quad \ldots\ldots(3)$$

(3) নং থেকে (1) নং বিয়োগ করে পাওয়া যায়,—

$$zx-xy+z-y=16$$

বা, $$x+1=\frac{16}{z-y}$$

আবার, (3) নং থেকে (2) নং বিয়োগ করে পাওয়া যায়,—

$$zx-yz+x-y=9$$

বা, $$z+1=\frac{9}{x-y}$$

নির্ণেয় তিনটি সংখ্যার যে-কোন একটিকে $a-1$ মনে করে ডায়োফ্যাণ্টাস

৩. Ibid, Page—76

দেখালেন অন্য দুইটি সংখ্যা হবে যথাক্রমে $\frac{9}{a-1}$ এবং $\frac{16}{a-1}$; তারপর a-এর মান বার করলেন $\frac{12}{5}$

কিরূপ পদ্ধতির সাহায্যে তিনি সমাধান করতেন, তার একটি উদাহরণ তুলে ধরা যাক। অবশ্য ওপরের উদাহরণের শেষাংশে তার ইঙ্গিত আছে।

সমস্যা ঃ এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাদের সমষ্টি 20 ও গুণফল 96।

পদ্ধতি ঃ প্রদত্ত সমষ্টি 20, প্রদত্ত গুণফল 96, নির্ণেয় সংখ্যা দুইটির অন্তর 2x; সুতরাং সংখ্যা দুইটি $10+x$, $10-x$; অতএব, $100+x^2=96$; সুতরাং $x=2$ এবং নির্ণেয় সংখ্যা দুইটি 12, 8।

এইমাত্র যে উদাহরণটি দেওয়া হলো, তাতে তবু পদ্ধতির সামান্য ব্যাখ্যা পাওয়া যায়, কিন্তু অন্যত্র ডায়োফ্যাণ্টাস প্রায় কোন ব্যাখ্যাই দেননি,—কেবল উত্তরটি উল্লেখ করেছেন। এখানে সেরূপ আর দুইটি উদাহরণ দেওয়া হলো ঃ

সমস্যা ঃ প্রদত্ত একটি বর্গ-সংখ্যাকে দুইটি বর্গ-সংখ্যায় বিভক্ত কর।

এই সমস্যার সমাধানে তিনি প্রদত্ত বর্গ-সংখ্যাকে 16 ধরেছেন এবং উত্তর দিয়েছেন 256/25 ও 114/25.

এখানে একটি বিষয় বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য যে, এই সেই বিশ্ববিখ্যাত অঙ্ক যা পড়ে ফরাসী গণিতজ্ঞ **ফেরমা** (**Fermat**) একটি উপপাদ্যের সৃষ্টি করেছিলেন এবং গণিতের ইতিহাসে তা **ফেরমার শেষ উপপাদ্য** (***Fermat's Last Theorem***) বলে আখ্যাত ঃ

$x^m+y^m=z^m$, $m>2$ হলে সমাধান সম্ভব নয়।*

সমস্যা ঃ এমন তিনটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাদের সমষ্টি এবং যে-কোন দুইটির সমষ্টি বর্গ-সংখ্যা হবে।

এখানে তিনি কেবল উত্তরটি দিয়েছেন ঃ 80, 320 ও 41

বীজগণিতে ডায়োফ্যাণ্টাসের সবচেয়ে বড় কৃতিত্ব অনির্ণেয় সমীকরণের সমাধান সম্পর্কিত গবেষণায়। তাঁর পূর্বে গ্রীক গণিতে এ ধরনের সমীকরণের অস্তিত্ব পরিলক্ষিত হয়। পীথাগোরাসের উপপাদ্য $x^2+y^2=z^2$, আর্কিমিদিসের গোবাদি সমস্যা ইত্যাদিতে অনির্ণেয় সমীকরণ দেখা যায়। নিকোম্যাকাস একমাত্রার অনির্ণেয় সমীকরণ নিয়ে আলোচনা করেছেন। কিন্তু ডায়োফ্যাণ্টাসের গৌরব

* খুব সহজ করে বললে সমস্যাটি এরূপ ঃ m যদি 2-এর চেয়ে বড় কোন অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ করতে হবে $x^m+y^m=z^m$। কিন্তু সমীকরণটি সত্য হতে গেলে x, y ও z তিনটি রাশিই অখণ্ড ধনাত্মক মানবিশিষ্ট হতে পারে না।

একমাত্রার অনির্ণেয় সমীকরণ নিয়ে নয়। তা ছাড়া এ নিয়ে ঐতিহাসিক বিতর্কও আছে। বস্তুতপক্ষে, অনির্ণেয় সমীকরণ সম্পর্কে, তা-ও আবার বিশেষ ধরনের সমীকরণ নিয়ে।

অনেকেই জানেন, $Nx^2 \pm c = y^2$ এই সমীকরণকে অনির্ণের দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হয়। কিন্তু ডায়োফ্যাণ্টাস ঠিক এই ধরনের আকারবিশিষ্ট সমীকরণ সমাধান করেননি। তিনি কয়েকটি বিশেষ ধরনের সমীকরণ সমাধান করেছিলেন। তাঁর অ্যারিথমেটিকার প্রথম খণ্ড ছাড়া অবশিষ্ট অংশে তিনি নানা ধরনের সমীকরণ সমাধান করেছেন। দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধানে তিনি সাধারণ পদ্ধতি (**General Method**) দেননি। এই ধরনের সমীকরণের সাধারণ আকার (**General Form**) নিম্নরূপ ঃ

$$y^2 = Ax^2 + Bx + C$$

এখানে y^2-এর উল্লেখ না করে বলেছেন দ্বিঘাত রাশিটি কোন **বর্গ-সংখ্যা**-র সমান হবে। তিনি A, B ও C-এর বিশেষ বিশেষ মান ধরে পৃথক পৃথকভাবে অগ্রসর হয়েছেন। $y^2 = Ax^2 + Bx + C$ এই সমীকরণের অনেক রূপ হয়; তিনি কেবল সেইগুলির সমাধান করেছেন যেগুলিতে **দ্বিঘাত** অথবা **ধ্রুবক** রাশিটি থাকে না। ডায়োফ্যাণ্টাসের পদ্ধতি সম্পর্কে **Nesselmann**-এর মন্তব্য উদ্ধৃতি করে **Gow** যা বলেছেন তা অবশ্যই প্রণিধানযোগ্য ঃ "(1) Indeterminate equations of the second degree are treated completely only when the quadratic on the absolute term is wanting : his solution of the equations $Ax^2 + C = y^2$ and $Ax^2 + Bx + C = y^2$ is in many respects cramped. (2) For the 'double equation' of the second degree he has a definite rule only when the quadratic term is wanting in both expressions : even then his solution is not general. More complicated expressions occur only under specially favourable circumstances."[৪]

নিম্নরূপ দ্বিঘাত সমীকরণ তাঁর গ্রন্থে দেখা যায় ঃ

$$y^2 = Ax^2 + Bx + C$$
$$z^2 = Dx^2 + Ex + F$$

এখানেও সাধারণ পদ্ধতি নেই। A, B, C·········F-এর বিশেষ বিশেষ মান ধরেছেন এবং y ও z-কে x-এ পরিণত করে x-এর সমাধান করেছেন।

তিন ও ততোধিক ঘাতের সমীকরণও তাঁর সমস্যায় দেখা যায় এবং এখানে রাশিটি কোন বর্গ-সংখ্যার সমান। উদাহরণস্বরূপ,—

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + d^2 = y^2$$

৪, A History of Mathematics—F. Cajori, Page—76

একটি ঐতিহাসিক অপলাপ

ভারতীয় গণিতে একঘাত অনির্ণেয় সমীকরণ অতি প্রাচীন। খ্রীস্টপূর্ব অষ্টম শতাব্দীর পূর্ব থেকেই এর অস্তিত্ব পরিলক্ষিত হয়। শুল্বসূত্রে নির্দিষ্ট আকৃতির যজ্ঞবেদী নির্মাণে **অনেকবর্ণ অনির্ণেয় সমীকরণ** ব্যবহৃত হয়েছিল। গার্হপত্য বেদী নির্মাণ থেকে নিম্নরূপ সমীকরণ পাওয়া যায়ঃ

$$\frac{x}{m^2}+\frac{y}{n}=1, \quad x+y=21$$

ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যায় এর দুইটি সমাধান পাওয়া যায়ঃ

$$x=9,\ y=12,\ m=6,\ n=4$$

$$x=5,\ y=16,\ m=3,\ n=4$$

গরুড়-চয়ন-চিতি নির্মাণ সম্পর্কে আচার্য বৌধায়ন যে আলোচনা করেছেন, তা থেকে এই দুইটি জটিল সমীকরণ পাওয়া যায়ঃ

$$(1) \quad \frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}+\frac{u}{q}=7\tfrac{1}{2}$$

$$(2) \quad x+y+z+u=200$$

কিন্তু আর্যভট এই সমীকরণের সমাধান পদ্ধতি আবিষ্কারে অভূতপূর্ব সাফল্য লাভ করেন। একঘাত অনির্ণেয় সমীকরণের সাধারণ আকার $by=ax\pm c$। আচার্য আর্যভট $by=ax+c$ এই সমীকরণটির সমাধান করেন a, b ও c ধনাত্মক পূর্ণরাশি ধরে। তারপর তিনি একমাত্রার সহসমীকরণ সমাধানও করেন। কিন্তু গণিতের ইতিহাসে এটি **ডায়োফ্যাণ্টীয় সমীকরণ** নামে আখ্যাত। আমাদের মনে হয়, ভারতীর গণিতে অজ্ঞতার জন্য ঐতিহাসিকদের এই ত্রুটি ঘটেছে।* এই সম্পর্কে একটি হাস্যকর ত্রুটির উল্লেখ করা যাক। L. Hogben-এর Mathematics for the Million গ্রন্থটি খুবই জনপ্রিয় এবং তা বইটির সংস্করণ দেখলেই বোঝা যায়। তিনি ওই গ্রন্থের How Algebra Began অধ্যায়ের 286 পাতায় বলেছেন,—"Our knowledge of Hindu mathematics begins with nhe *Lilavati* of Aryabhata about A. D. 470. This author discusses the rules of arithmatic, uses the law of signs of Diophantus, gives a table of sines in $3\frac{3}{4}°$, and evaluates π as 3·1416. In short, Hindu mathematics starts where Alexandrian mathematics left off." এমন কিছু কিছু দৃষ্টান্ত তুলে ধরা কিছু কষ্টকর নয়।

---

* এই অজ্ঞতার একটি উল্লেখ সুন্দর লাল তাঁর '*Indian contribution to the development of complex number*' প্রবন্ধে সুন্দর আলোচনা করেছেন; IJMT, vol. XII Number 1, 1986.

কিন্তু আমরা ওসবের মধ্যে যাব না, সংক্ষেপে এই ত্রুটি সংশোধনে সূত্র দেবার প্রয়াস পাব।

ডায়োফ্যান্টাস চতুর্থ শতাব্দীর প্রথমার্ধে বর্তমান ছিলেন। তাঁরই শতাধিক বছর পরে আর্যভটের আবির্ভাব এবং অন্তত নবম-দশম খ্রীস্টপূর্বাব্দে ভারতে অনির্ণেয় সমীকরণ দুর্লভ ছিল না। তা ছাড়া ডায়োফ্যান্টাস যে ধরনের সমীকরণ নিয়ে আলোচনা করেছেন, সেইটি এই সমীকরণের এক বিশেষ রূপ, আর মূলদ বীজ নির্ণয় করাই তাঁর লক্ষ্য ছিল। বস্তুতপক্ষে, $y^2 = Ax^2 + Bx + C$ এই সমীকরণের সমাধান, তাও ছিল বিশেষ শর্তে, এটাই ছিল তাঁর গাণিতিক প্রতিভার স্বাক্ষর। তা ছাড়াও গ্রীক ও ভারতীয় পদ্ধতিতে মূলগত প্রভেদ বিদ্যমান। আচার্য আর্যভট সর্বপ্রথম এই সমীকরণের সুষ্ঠু আলোচনার সূত্রপাত করেন বলে আমাদের প্রস্তাব এই সমীকরণের নাম **আর্যভটীয় সমীকরণ** রাখা হোক। তা হলে একদিকে যেমন ঐতিহাসিক ত্রুটি বা অপলাপ সংশোধিত হবে, তেমনি প্রকৃত আবিষ্কারক ও পথিকৃৎ যোগ্য সমাদর ও সম্মান লাভ করবেন।

কৃতিত্ব ও মূল্যায়ন

ইতিপূর্বে আমরা ডায়োফ্যান্টাসের কৃতিত্বের কিছু কিছু উল্লেখ করেছি। এখানে তাঁর প্রতিভার সর্বশেষ সাফল্য ও অসাফল্যের কথা অতি সংক্ষেপে উল্লেখ করা হলো।

অ্যারিথমেটিকায় যে নানা ধরনের সমীকরণ আছে, সে-সবের সমাধানে তাঁর কৃতিত্বের কথা ভুললে চলবে না। সবচেয়ে বড় কথা, বিভিন্ন ধরনের সমস্যা থেকে উদ্ভূত সমীকরণগুলি তিনি এমন আকারে পরিণত করে নিয়েছেন যাতে তাঁর পক্ষে অতি সহজে সমাধান সম্ভব হয়। এ-বিষয়ে তাঁর দক্ষতা ও নৈপুণ্য অবশ্যই প্রশংসনীয়।

গ্রীক গণিতের ইতিহাসে তাঁর প্রকৃত পূর্বসূরী খুঁজে পাওয়া দুরূহ। বিশেষত তিনি যেভাবে অনির্ণেয় সমীকরণ নিয়ে আলোচনা করেছেন, তা নিঃসন্দেহে গ্রীক গণিতে তুলনারহিত। যদিও তাঁর ওপর মিশরীয় ও ব্যাবিলনীয় প্রভাব পড়েছিল বলে ঐতিহাসিকরা বলেন, তা হলেও তিনি তুলনাহীন, আর তাঁর ওপর ভারতীয় প্রভাব পড়ে থাকলে, তাতেও তাঁর প্রতিভার মৌলিকতা বিনষ্ট হয় না! কারণ, ভারতীয় ও তাঁর পদ্ধতিতে যথেষ্ট প্রভেদ আছে। অবশ্য ভারতীয় গণিতজ্ঞরা নির্ণেয় ও অনির্ণেয় সমীকরণের সমাধান পদ্ধতি ও বীজ নির্ণয়ে অনেকাংশে অগ্রসর। সে তুলনায় ডায়োফ্যান্টাস গ্রীক সমাজ কাঠামোর কারাগারে বন্দীদশা প্রাপ্ত হয়েছেন।

দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধানে তিনি কেবল ধনাত্মক মূলদ বীজটিই বিবেচনা করেছেন, অন্য সব বীজ অস্বীকার করেছেন,—ঋণাত্মক হলে তো কথাই নেই।

এমন কি যে-সব সমীকরণের দুইটি ধনাত্মক বীজ আছে, তিনি তার একটি মাত্র দিয়েছেন। এ-বিষয়ে ভারতীয় গণিতজ্ঞদের কৃতিত্ব তুলনাহীন। আবার, যে-সমীকরণের দুইটি ঋণাত্মক বীজ হয় বা কাল্পনিক বীজ হয়, সে-ক্ষেত্রে তিনি সমস্যাটি সমাধানের অযোগ্য বলে পরিত্যাগ করেছেন।

ডায়োফ্যাণ্টাস সমীকরণ সমাধানের কোন সাধারণ পদ্ধতি দেননি। তাঁর গ্রন্থে যত রকমের সমীকরণ আছে, প্রত্যেক ক্ষেত্রে তিনি পৃথক পৃথক পদ্ধতি দিয়েছেন। **Hermann Hankel** রসিকতা করে বলেছেন 100টি সমাধান করেও 101-তমটি করতে পারা যাবে না। তাঁর সাধারণীকরণ না করার একটি কারণ সম্ভবত রোমান যুগের রূঢ় বাস্তবতার মধ্যে পড়ে তিনি গ্রীকদের গৌরবময় বিমূর্ত চিন্তনে তত বেশী আকৃষ্ট ছিলেন না,—প্লেটোর বহুনিন্দিত **logistica**-য় আগ্রহী ছিলেন। তাঁর এই বৈশিষ্ট্যের সঙ্গে ভারতীয় গণিতজ্ঞদের বিস্ময়কর সাদৃশ্য দেখা যায়।

অ্যারিথমেটিকায় অনেক-কিছু নেই, কিন্তু তাতে কিছু আসে যায় না। যা আছে, তাতেই ডায়োফ্যাণ্টাস অমর হয়ে থাকবেন।

পঞ্চদশ অধ্যায়

প্যাপাস

(জন্ম আনুমানিক 340 খ্রীস্টাব্দ)

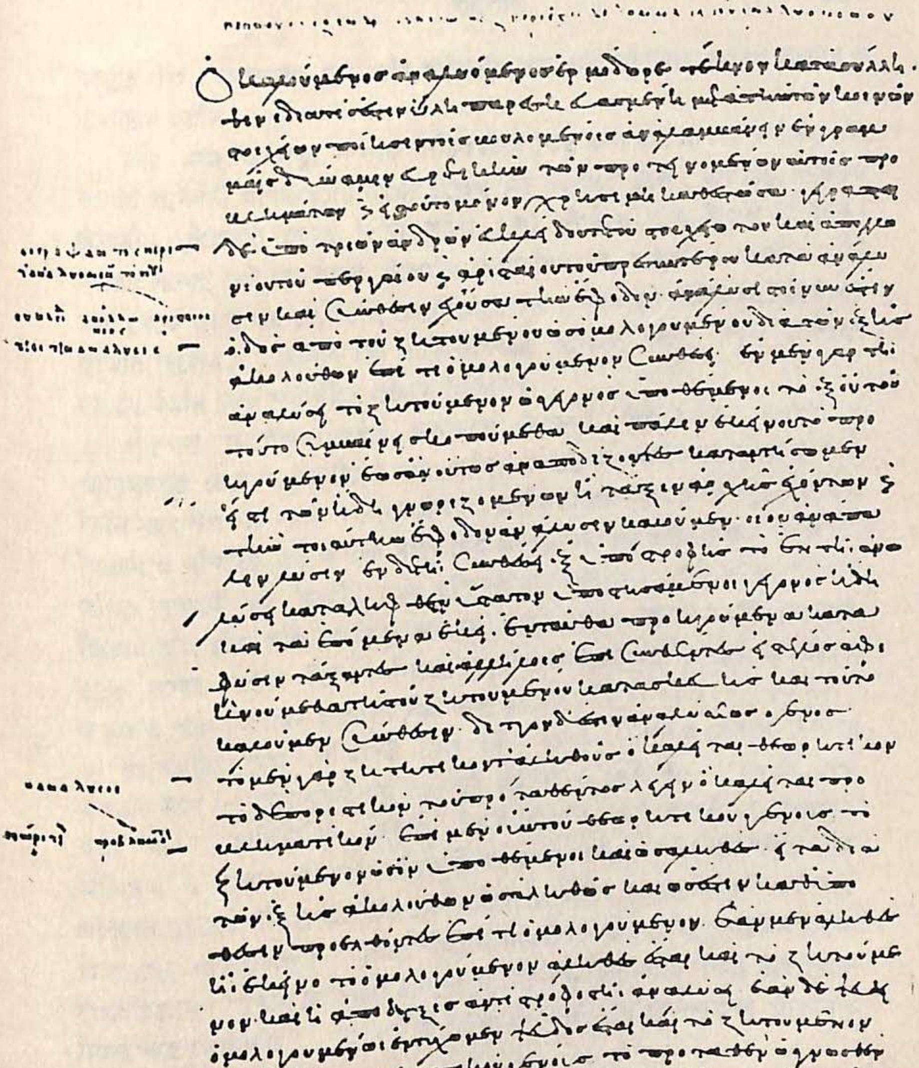
"...But among his contemporaries, Pappus is like the peak of Teneriffe in the Atlantice".

J. Gow

ইতিহাসের বিবর্তন ধারায় এক এক সময় অবক্ষয় ও অধঃপতনের যুগ দেখা যায়। তখন সৃজনশীল মহৎ প্রতিভার আবির্ভাব হয় না। এই সময় অপেক্ষাকৃত কম প্রতিভা সম্পন্ন মানুষের আবির্ভাব হয়। এঁরা মূলত তাঁদের কর্মকৃতি পূর্ববর্তী সৃজনধর্মী প্রতিভাশালীদের সৃষ্টির ব্যাখ্যা-বিশ্লেষণের মধ্যেই নিজেদের আবদ্ধ রাখেন, তাঁরা যে-সব তথ্য-তত্ত্বের মধ্যে শূন্যস্থান পূরণের সুযোগ রেখে গেছেন, সেইগুলি সরবরাহ করেন। ভারতীয় গণিতে ভাস্করাচার্যের পর ঠিক এই রকম অবক্ষয়ের যুগ সূচিত হয়; আর্যভট-ব্রহ্মগুপ্ত-ভাস্করের মত অনন্য গাণিতিক প্রতিভা আর দেখা যায়নি। যাঁরা গাণিতিক গবেষণা চালিয়ে গেছেন, তাঁরা সবাই টীকা-ভাষ্য রচনা করেছেন, মৌলিক আবিষ্কার হয়নি বললেই বলে। তেমনি গ্রীসেও খ্রীস্টীয় শতাব্দীর প্রারম্ভকাল থেকেই এই যুগের সূচনা হয়। ডায়োফ্যাণ্টাসের পর এবং অ্যাপোলোনিয়াস, আর্কিমিডিস প্রমুখ গণিতজ্ঞদের মত আর কোন মৌলিক ও সৃজনাত্মক প্রতিভা দেখতে পাওয়া যায় না। **প্যাপাস, থিওন, প্রোক্লাস** প্রমুখ এই যুগের প্রতিনিধি। তাঁদের মৌলিক আবিষ্কার তেমন কিছু না থাকলেও, তাঁরা যে টীকা-ভাষ্য রচনা করে গেছেন, এবং পূর্ববর্তী গণিতজ্ঞদের আবিষ্কার সংরক্ষণ করে গেছেন, তার মূল্য কম নয়। প্যাপাস তাঁর সময়েই কেবল গণিতের পুনরুত্থানে প্রশংসনীয় উদ্যম গ্রহণ করেননি, প্রায় তেরশ' বছর ধরে প্রতিভাধর গণিতজ্ঞদের প্রেরণা দান করে এসেছেন। দেকার্ত, ফেরমা, পাস্কাল এবং দেসারগুয়ে (Desargues) প্যাপাস কর্তৃক কম অনুপ্রাণিত হননি। কেবল এই জন্যই গণিতের ইতিহাসে তাঁদের স্থায়ী আসন হতে পারে, সন্দেহ নেই।

জীবনের টুকরো কথা

গৌরবোজ্জ্বল গ্রীক গণিতের সর্বশেষ প্রতিনিধি প্যাপাস। পূর্বসূরী ইউক্লিড, অ্যাপোলোনিয়াস ও আর্কিমিডের সঙ্গে যে তাঁর তুলনা চলেনা, তা বলাই বাহুল্য। তা বলে গাণিতিক প্রতিভায় তিনি একেবারে নিকৃষ্ট নন; মৌলিক প্রতিভার স্বাক্ষর তাঁর রচনায় ইতস্তত বিক্ষিপ্ত অবস্থায় দেখতে পাওয়া যায়। সত্য কথা



চতুর্থ শতাব্দীর পাণ্ডুলিপিতে সংরক্ষিত **Collection**-এর অংশ—
gr. 218. f. 118
ফটো : **Biblioteca Vaticana**
(ডঃ প্রদীপ কুমার মজুমদারের সৌজন্যে)

বলতে কি, অবক্ষয়ের যুগে তাঁর আবির্ভাব বলে তাঁর প্রতিভার যথাযথ সমাদর ও মূল্যায়ন হয়নি।

তাঁর জন্ম ও মৃত্যু সম্পর্কে সঠিকভাবে কিছু বলা যায় না। আসলে, তাঁর রচনায় পূর্ববর্তী গণিতজ্ঞদের নামের উল্লেখ নেই বললেই চলে ; একমাত্র ব্যতিক্রম টলেমী। টলেমীর ক্ষেত্রে তিনি সর্বদা 140 খ্রীস্টাব্দ বলে উল্লেখ করেছেন। সুতরাং সন্দেহ নেই যে, তিনি টলেমীর পরবর্তীকালের গণিতজ্ঞ। আর একটি তথ্য থেকে জানা যায় যে, তিনি ডায়োক্লিটিয়ানের রাজত্বকালে (285-305 খ্রীস্টাব্দ) বর্তমান ছিলেন।* এইসব তথ্য ও সুইডাস-এর অভিমত থেকে এরূপ প্রতিপন্ন হয় যে, তিনি চতুর্থ শতাব্দীতে বর্তমান ছিলেন।

প্যাপাস আলেকজান্দ্রিয়ায় জন্মগ্রহণ করেন। তাঁর নিজস্ব গবেষণা ও আবিষ্কারের চেয়ে পূর্বসূরীদের নানা গাণিতিক তত্ত্ব ও তথ্য রচনার অন্তর্ভুক্ত করে তিনি মহৎ উপকার সাধন করে গেছেন। প্রাচীনকালের সব দেশেই বহু মূল্যবান বিজ্ঞান ও গণিতের তত্ত্ব ও তথ্য সংরক্ষণের অভাবে অবলুপ্ত হয়ে গেছে। ভারতীয় গণিত সম্পর্কে এই কথাটি বোধ করি সবচেয়ে প্রযোজ্য। যাই হোক, প্যাপাস ছিলেন বলে গ্রীক গণিতের কিছু অংশ যে বিস্মৃতির হাত থেকে রেহাই পেয়েছে, তাতে সন্দেহ নাই। তিনি গণিতের যে ইতিহাস রচনা করে গেছেন, তা অমূল্য ও দুর্লভ বলে বিবেচিত হবার অবশ্যই দাবী রাখে।

ক্লাসিক্যাল যুগে জ্যামিতিই ছিল গ্রীক মনের আনন্দ ও সৌন্দর্য চেতনার একমাত্র উৎস। আলেকজান্দ্রিয় যুগে এই ঐতিহ্য ও বৈশিষ্ট্যের পরিবর্তন লক্ষ করা যায়। আর্কিমিডিস, হীরন, নিকোম্যাকাস, ডয়োফ্যাণ্টাসের গবেষণা, আবিষ্কার ও প্রভাব পরবর্তী গণিতজ্ঞদের ওপর অধিক পরিমাণে পড়ায় গ্রীক গণিতের সর্বশ্রেষ্ঠ ঐতিহ্য জ্যামিতি ক্রমশ গৌরব ও মর্যাদা হারাতে থাকে। এই সময় প্যাপাসের আত্মপ্রকাশ। প্যাপাস সুমহান জ্যামিতিক ঐতিহ্য বজায় রাখার প্রয়াস পেয়েছিলেন। তিনি যে সফল হয়েছিলেন, তা বলা যায় না। কিন্তু তাঁর প্রয়াস নিঃসন্দেহে প্রশংসনীয়। আর এই জন্যই তাঁকে গ্রীক গণিতের সর্বশেষ প্রতিনিধি বলা হয়।

প্যাপাসের রচনাবলী

প্যাপাস কম করেও চারখানি গ্রন্থের রচয়িতা। টলেমীর অ্যালমাজেস্ট, ইউক্লিডের **এলিমেণ্টস**, ডায়োডোরাসের অ্যানালেমা-র (*Analemma*) ওপর তিনি টীকা-ভাষ্য রচনা করেছিলেন। কিন্তু দুর্ভাগ্যের বিষয়, এ-সব গ্রন্থের আর কোন অস্তিত্ব নেই—সবই অবলুপ্ত হয়ে গেছে। পরববর্তীকালের গণিতের ঐতিহাসিক প্রোক্লাসের লেখা থেকে জানতে পারা যায়, প্যাপাস নাকি ইউক্লিডের

* Encyclopaedia Britannica; 14th Ed, Pappus.

এই মন্তব্যের বিরোধিতা করে বলেছিনে,—**সমকোণের সমান হলেই কোন কোণ সমকোণ হবে না** (an angle equal to a right angle is *not* always itself a right angle (বাঁকা অক্ষর লেখকের)।

তাঁর সর্বশ্রেষ্ঠ রচনা **গণিত সংগ্রহ** বা *Mathematical Collections*. এখনো এই গ্রন্থটির অস্তিত্ব বজায় আছে, কিন্তু অবিকৃত অবস্থায় নয়। প্রথম দুইটি খণ্ডের সামান্য অংশই উদ্ধার করা সম্ভব হয়েছে। সেইজন্য ফ্রেডারিক হুলশ প্রমুখ পণ্ডিতগণ অবশ্যই সাধুবাদ পাবেন। প্যাপাসের এই গ্রন্থটি লেখার উদ্দেশ্য সম্ভবত সেই সময়কার পঠন-পাঠনে সহায়তা করা। বস্তুত, পাটীগণিত ও জ্যামিতির জটিল ও দুরূহ তত্ত্বের সুন্দর ও প্রাঞ্জল ব্যাখ্যা দেওয়াই তাঁর উদ্দেশ্য ছিল বলে মনে হয়। এমন কি তাঁর পর্বসূরী গণিতজ্ঞরা যে-সব তত্ত্বের ব্যাখ্যা দেননি, যা প্রতিজ্ঞা বলে মনে করেছেন বা অতি সহজ বলে প্রমাণ দেওয়ার প্রয়োজনবোধ করেননি, সেই সব বিষয়ের ওপর প্যাপাস কলম ধারণ করেছেন। **"গণিতসংগ্রহ"** প্রণালীবদ্ধ আলোচনা, আর এর ভাষাও সাবলীল ও অনবদ্য। গণিতের ইতিহাসে এবং গণিতের ইতিহাস রচনার দিক থেকে বিচার করলে **গণিতসংগ্রহ** বা **Mathematical Collection**-এর স্থান নির্দিষ্ট এবং প্রামাণিক। তাঁর *The Collection*-এর গুরুত্ব সম্পর্কে **Midonick** বলেন, **"The procedure employed by Pappus in discussing individnal problems has been of inestimable historical value."** *

গণিতে অবদান

পাঁচখণ্ডে সমাপ্ত এই গ্রন্থে যে প্যাপাসের মৌলিকতা দেখতে পাওয়া যায় না, তা নয়। ইতস্তত বিক্ষিপ্ত নানা উপাদানের মধ্যে তার সাক্ষ্য আছে। তবে একথা সত্য, তাঁর প্রতিভা প্রথম শ্রেণীর বলে বিবেচিত না হতে পারে, কিন্তু উপেক্ষা করার মত নয়।

প্রথম খণ্ডের অবলুপ্ত অংশে পাটীগণিতের আলোচনা ছিল বলে আনুমান করা হয়। কারণ, দ্বিতীয় খণ্ডে যে পাটীগণিতের আলোচনা আছে, তা মাঝপথে আরম্ভ হয়েছে। তৃতীয় থেকে সপ্তম খণ্ড পর্যন্ত জ্যামিতিক আলোচনা দেখা যায়। অষ্টম খণ্ডের প্রধান আলোচ্য বিষয় **বলবিদ্যা**। এখানে তিনি আর্কিমিডিস, হীরন প্রমুখ প্রধান প্রধান গণিতজ্ঞদের বলবিদ্যা আলোচনা করেছেন, আবার অনেক অপ্রধান গণিতজ্ঞদের বিষয়েও আলোচনা করেছেন। প্যাপাসের মতে এঁরাই গণিতের এই শাখার পথিকৃৎ। তাঁর **ভারকেন্দ্র**-এর সংজ্ঞাটি লক্ষ করার মত : **ভারকেন্দ্র বস্তুর মধ্যস্থিত এমন একটি বিন্দু যেখান থেকে এটিকে ঝোলালে**

* Treasury of Mathematics, Vol-I, Page—394-39১

বস্তুটি স্থির থাকবে। অষ্টম খণ্ডে নততলে গতিশীল বস্তুর ধর্ম নিয়ে আলোচনাও দেখা যায়।

তাঁর গ্রন্থে **জেনোডোরাস** (Zenodorus, 200 B. C.—100 A.D.) নামে এক গণিতজ্ঞের সমপরিসীমা বিশিষ্ট (isoperimetric) বস্তুর ধর্ম সম্বন্ধে কয়েকটি উপপাদ্য দেখা যায় :

(a) সমপরিসীমাবিশিষ্ট n-বাহুসম্পন্ন বহুভুজের মধ্যে সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল সবচেয়ে বেশী।

(b) সমপরিসীমাবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের মধ্যে যার বাহুসংখ্যা বেশী তার ক্ষেত্রফল সর্বাধিক।

(c) একই পরিসীমাবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ ও বৃত্তের মধ্যে বৃত্তের ক্ষেত্রফল অধিক।

(d) সমপৃষ্ঠফল বিশিষ্ট ঘনবস্তুর মধ্যে গোলকের আয়তন সর্বাধিক।

এই উপপাদ্য সমূহের আধুনিক রূপের কথা বলতে গিয়ে একজন আধুনিক প্রখ্যাত গণিতের ঐতিহাসিক বলেছেন,—**"The subject of the theorems, which today we would describe as maxima and minima problems, was novel in Greek mathematics."**[১]

তৃতীয় খণ্ডে সমানুপাত, বৃত্তে অন্তর্লিখিত ঘন, একটি ঘনকের দ্বিগুণ পরিমাণ ঘনক অঙ্কন ইত্যাদি সম্পর্কে আলোচনাও আছে। এই খণ্ডে প্রদত্ত দুইটি সরলরেখার দুইটি মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় বিষয়ে আলোকপাত করেছেন তিনি. আবার মধ্যকের সাধারণ গুণাগুণ সম্পর্কেও নতুনভাবে কিছু বলার প্রয়াস পেয়েছেন। দুইটি সরলরেখার অন্তর্বর্তী **সমান্তর, গুণোত্তর** ও **বিপরীত** মধ্যক,—এই তিন ধরনের মধ্যককে একই সঙ্গে একটি মাত্র জ্যামিতিক অঙ্কনের সাহায্যে প্রকাশ করার পদ্ধতি, তাঁর জ্যামিতিক প্রতিভার বৈশিষ্ট্য ও নিদর্শন বলে অবশ্যই স্বীকার করতে হবে।

চতুর্থ খণ্ডে **কুন্ডলী** (Spiral) ও **কোয়াড্রেট্রিক্স** (Quadratrix) সম্বন্ধে আলোচনা দেখা যায়। যেমন,— **তিনটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করে আছে ; এই তিনটি বৃত্তকে বেষ্টন করে একটি পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে।** কোণের ত্রিখণ্ডীকরণের সমস্যা অতি প্রাচীন গ্রীক সমস্যা ; এই সমস্যাটি নিয়েও তিনি আলোচনা করেছেন।

পঞ্চম খণ্ডে জেনোডোরাসের উপপাদ্যসমূহের সম্প্রসারিত রূপ দেখতে পাওয়া যায়। এখানে প্যাপাস জেনোডোরাসের অনুরূপ একটি উপপাদ্যের সংযোজন করেছেন : **একই পরিসীমা বিশিষ্ট বৃত্তাংশসমূহের মধ্যে অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল**

১. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times—M. Kline. Page—126

বৃহত্তম। এখানেই তিনি প্রমাণ করে দেখিয়েছেন যে, একই পৃষ্ঠফলবিশিষ্ট শঙ্কু, চোঙ বা সুষম বহুতলের মধ্যে গোলকের আয়তন সর্বাধিক।

ষষ্ঠ খণ্ডে গণিতের দিক থেকে তেমন মূল্যবান আলোচনা নেই, কিন্তু এই খণ্ডের অন্য মূল্য ও গুরুত্ব আছে,—ঐতিহাসিক গুরুত্ব। এখানে মুখ্য আলোচিত বিষয় জ্যোতির্বিজ্ঞান। অ্যারিস্টারকাসের জ্যোতির্বিজ্ঞান, ইউক্লিডের পদার্থ বিজ্ঞান সম্বন্ধীয় মতবাদ,—আলোক ও তার প্রবাহ সম্পর্কে, আর থিওডোসিয়াসের বৈজ্ঞানিক বর্ণনা এই খণ্ডের অন্তর্ভুক্ত।

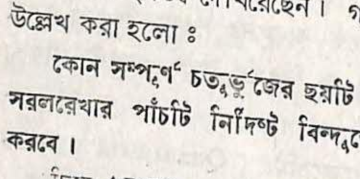
সপ্তম খণ্ডকে **বিশ্লেষণ (Analysis)** ও তার ইতিহাস বলা যেতে পারে। এখানে তিনি জ্যামিতির কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ ও মৌলিক প্রতিজ্ঞা বা উপপাদ্যের প্রমাণ করেছেন। এই খণ্ডেই তাঁর সেই বিখ্যাত উপপাদ্য আছে যা হাজার বছরেরও অধিক সময় পরে **পল গুলডিন (Paul Guldin, 1577-1643)** স্বাধীনভাবে আবিষ্কার করেন, এবং তাঁর নাম অনুসারে **গুলডিন উপপাদ্য** নামে আখ্যাত হয়। প্যাপাস এই উপপাদ্যের প্রমাণ দেননি, কিন্তু এরূপ মনে করা হয়, এই উপপাদ্য ও প্রমাণ তাঁর পূর্বেই আবিষ্কৃত হয়েছিল। উপপাদ্যটি এইরূপ ঃ

গুলডিনের উপপাদ্য ঃ নিজ সমতলে অবস্থিত কোন বহিঃস্থ অক্ষকে কেন্দ্র করে কোন সামতলিক চিত্রকে আবর্তন করলে যে কঠিন বস্তুর আয়তন উৎপন্ন হয়, তা ওই চিত্রের ক্ষেত্রফল ও ভারকেন্দ্র কর্তৃক দূরত্ব অতিক্রমণের গুণফলের সমান।

প্রাচীন ভারতীয় গণিতে বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ সম্পর্কীয় গবেষণায় ব্রহ্মগুপ্ত অসামান্য প্রতিভার স্বাক্ষর রেখে গেছেন। ভাস্করাচার্যের পর নারায়ণ পণ্ডিত চতুর্ভুজের তৃতীয় কর্ণের অবতারণা করেন। প্যাপাস চতুর্ভুজ ও কর্ণসম্পর্কীয় গবেষণায় উল্লেখযোগ্য কৃতিত্ব দেখিয়েছেন। গণিত সংগ্রহের সপ্তম খণ্ডের 130নং উপপাদ্যটি উল্লেখ করা হলো ঃ

কোন সম্পূর্ণ চতুর্ভুজের ছয়টি বাহু (চারটি বাহু ও দুইটি কর্ণ) কোন সরলরেখার পাঁচটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করলে, ষষ্ঠটিও নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করবে।

চিত্রে ABCD একটি চতুর্ভুজ। কর্ণসমেত এর ছয়টি বাহু একটি ঐচ্ছিক সরলরেখা PU-এর P, Q, R, S, T ও U বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্যাপাসের উপপাদ্য অনুসারে এই ছয়টি বিন্দুর পাঁচটি নির্দিষ্ট হলে অন্যটিও অর্থাৎ ষষ্ঠটিও নির্দিষ্ট হবে। তিনি প্রমাণ করে দেখিয়েছেন যে, ছয়টি বিন্দু নিম্নের শর্তটি অবশ্যই পূরণ করবে ঃ



চিত্র—27

$$\frac{PU}{PS}\Big/\frac{TU}{TS}=\frac{PU}{PQ}\Big/\frac{RU}{RQ}$$

বহু শতাব্দী পরে এই শর্তটি Desargues কর্তৃক আবিষ্কৃত হয় এবং তিনি এই ছয়টি বিন্দুর নাম দেন **বিন্দুর উদ্বর্তন** (**Points of an involution**)।

প্যাপাসের একটি সম্পাদ্য বিখ্যাত ফরাসী দর্শনিক ও গণিতজ্ঞ দেকার্তে ও মহাবিজ্ঞানী নিউটন কর্তৃক সমাদৃত হয়ে গণিতের ইতিহাসে সবিশেষ মর্যাদা পেয়েছে, এবং বর্তমানে তা **প্যাপাসের সম্পাদ্য** নামে অভিহিত। সেইটি এইরূপ ঃ

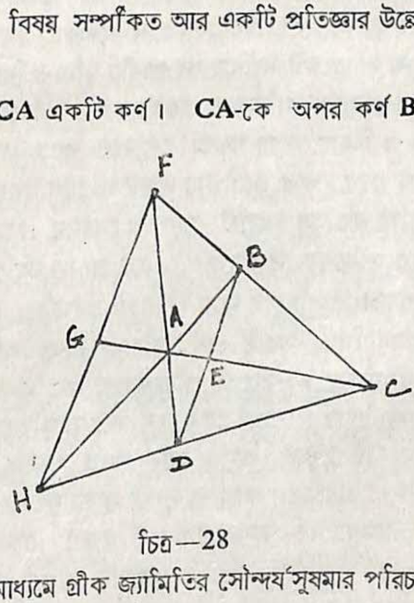
কোন সমতলের ওপর কতকগুলি সরলরেখা দেওয়া আছে ; একটি বিন্দুর সঞ্চার পথ এমনভাবে অংকন করতে হবে যাতে ওই বিন্দু থেকে প্রদত্ত সরলরেখার ওপর লম্ব অংকন করলে (বা বিশেষ কোণে সরলরেখা) কতকগুলি লম্বের গুণফল অবশিষ্টগুলির গুণফলের সঙ্গে সর্বদা এক প্রদত্ত অনুপাত রক্ষা করবে।*

এখানে উল্লেখ করার মত বিষয় হচ্ছে যে, **অ্যাপোলোনিয়াস** কনিকের নানা ধর্ম নিয়ে আলোচনা করেছেন সত্য এবং তাঁর গবেষণা পরিণত পর্যায়ের হলেও, কিন্তু তিনি কনিকের সংজ্ঞা দেননি। **প্যাপাস সম্পাদ্য** সম্পর্কিত গবেষণায়, অধিবৃত্তের **নাভি** (focus) নির্ণীত হয় এবং তিনি কনিকের সংজ্ঞা দিতেও সমর্থ হন। তিনি বলেন, **নিয়ামক** (directrix) ও **নাভি** (focus) থেকে দূরত্বের এক অনুপাত বজায় রেখে একটি বিন্দু সঞ্চার পথ রচনা করলে **কনিক** উৎপন্ন হবে।

ইতিপূর্বে চতুর্ভুজ ও কর্ণ সম্পর্কিত প্যাপাসের একটি উপপাদ্যের আমরা উল্লেখ করেছি। এখানে অনুরূপ বিষয় সম্পর্কিত আর একটি প্রতিজ্ঞার উল্লেখ করা হলো।

চিত্রে **ABCD** একটি চতুর্ভুজ, **CA** একটি কর্ণ। **CA**-কে অপর কর্ণ **BD** ছেদ করেছে এবং **FH**-ও। **AD** ও **BC** এবং **AB** ও **CD** বাহুগুলির ছেদ- বিন্দুর সংযোজন দ্বারা **FH** উৎপন্ন হয়েছে।

প্যাপাস তাঁর প্রতিজ্ঞায় বলছেন, **E**, **AC**-কে যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করবে, **G** ঠিক সেই অনুপাতে **AC**-কে বহির্বিভক্ত করবে।



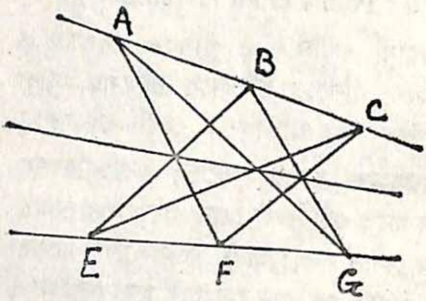
চিত্র—28

সপ্তম খণ্ডের 139নং উপপাদ্যটি **প্যাপাসের উপপাদ্য** নামে পরিচিত। এই উপপাদ্যের মাধ্যমে গ্রীক জ্যামিতির সৌন্দর্যসুষমার পরিচয় পাওয়া যায়।

---

* A History of Mathematics—F. Cajori, Page—60

কোন সরলরেখা ওপরর A, B ও C তিনটি বিন্দু, আর E, F ও G অন্য একটি সরলরেখার উপর তিনটি বিন্দু।



চিত্র—29

প্যাপাস বলছেন, AF ও EB, BG ও FC এবং AG ও EC অপর কোন সরলরেখার ওপর অবস্থিত তিনটি বিন্দুতে ছেদ করবে।

সমপরিসীমীয় জ্যামিতিক চিত্র বা আকার-এর (*Isoperimetric Figures*) আলোচনায় প্যাপাস গাণিতিক সমস্যার গভীরে অনুপ্রবেশের যে অপূর্ব উপায় অবলম্বন করেছেন, প্রাচীন গণিতজ্ঞদের লেখায় তার খুব উদাহরণ দেখা যায়।* সমস্যা সমাধানের আগে প্রাসঙ্গিক ভূমিকা কীরূপ হৃদয়গ্রাহী হতে পারে এবং শিক্ষার্থীর বিক্ষিপ্ত চিন্তাধারাকে কিভাবে এককেন্দ্রিক—একাগ্রচিত্ত করা যায়, তার সুন্দর ও অনুপম দৃষ্টান্ত তাঁর **'আইসোমেট্রিক ফিগার'**-এর প্রথমে দেখা যায়। পাঠকবর্গের পরিচিতির জন্য এখানে তা যথাসম্ভব বিবৃত হলো ঃ

ঈশ্বর মানুষকে দিয়েছেন প্রজ্ঞা, বোঝার ক্ষমতা, আর দিয়েছেন গণিত। কিন্তু কেবল মানুষকেই নয়, যে-সব প্রাণীর যুক্তি ও বিচার করার ক্ষমতা নেই, তাদেরও অন্তত সামান্য পরিমাণে হলেও এ-সব দিয়েছেন। মানুষ ঈশ্বরের কাছ থেকে যুক্তি ও বিচার করার ক্ষমতা পেয়েছে বলে তারা সব-কিছুকে যুক্তির আলোকে যাচাই করে, আর পরীক্ষার সাহায্যে গ্রহণ করে। কিন্তু অন্য প্রাণীরা ভগবদ্-দত্ত ক্ষমতায় স্বভাবজ দূরদৃষ্টি অনুসারে সেইসব কাজ করে যা তাদের জীবনধারণের ক্ষেত্রে সবিশেষ উপযোগী। এই প্রবৃত্তি বহু প্রজাতির প্রাণীর মধ্যে দেখা যায়,—বিশেষত মৌমাছিদের মধ্যে। রানী মৌমাছির প্রতি আনুগত্য, তাদের শৃঙ্খলা ও নিয়মানুবর্তিতা সত্যই প্রশংসনীয়। কিন্তু আরো বেশী প্রশংসার হচ্ছে তাদের প্রতিযোগিতা, মধু-সংগ্রহে পরিচ্ছন্নতা, আর এ-সব রক্ষণে তাদের পূর্ব-ভাবনা ও গার্হস্থ্য প্রযত্ন। তারা যেন মনে করে সংস্কৃতিসম্পন্ন মানুষের জন্য ঈশ্বরের কাছ থেকে ছিটেফোঁটা অমৃত বহন করে আনার দায়িত্ব ও ভার তাদের ওপর ন্যস্ত। সেইজন্য তারা মনে করে না সুন্দর সুন্দর ফুলের মধু সংগ্রহ করে মাটিতে বা কাঠে বা বাজেধরনের বস্তুতে রাখার উপযুক্ত। সে-কারণে তারা মধুচক্র নির্মাণ করে যার কোষগুলি সমান, সদৃশ ও পরস্পর সংলগ্ন (সন্নিহিত), আর আকারে সবই ষড়ভুজ—সুষম ষড়ভুজ।

* প্রাচীন ভারতীয় গণিতজ্ঞদের, বিশেষত ব্রহ্মগুপ্ত ও ভাস্করাচার্য সমস্যা উদ্ভাবনে অভূতপূর্ব কৃতিত্ব দেখিয়েছেন। দ্রষ্টব্য ঃ 'প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিবৃত্ত'।

তা হলে আমরা যেন বলতে পারি যে, তারা যেন এই কোষ ও চাকের গঠন-প্রণালী কোন জ্যামিতিক দূরদৃষ্টি অনুসারে উদ্ভাবন করেছে। তারা মনে করে, কোষগুলি সংলগ্ন (সন্নিহিত) হওয়া অত্যাবশ্যক, বাহুগুলি সাধারণ (common) হওয়া দরকার যাতে জোড়মুখে কিছু পড়তে না পারে, আর নির্মিতিকে সঙ্কীর্ণ না করে।

কিন্তু মাত্র তিনটি সরলরেখাঘটিত চিত্র বা আকার আছে যাতে ওপরের শর্ত পূরণ হতে পারে। সেই তিনটি অবশ্য সুষম আকারের চিত্র অর্থাৎ যা সমবাহু ও সদৃশকোণী। কারণ সমবাহু ত্রিভুজ, বর্গক্ষেত্র ও ষড়ভুজ সংলগ্ন বা সন্নিহিত হতে পারে, এবং তাদের বাহুগুলি **সাধারণ** (**common**) হতে পারে জোড়মুখের অসমতা ব্যতিরেকে। কারণ, কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করে কোন দেশ (**space**) ছ'টি সমবাহু ত্রিভুজ দ্বারা পূর্ণ হলে তার ছ'টি কোণের প্রত্যেকটির মান 2/3 সমকোণ ; চারটি বর্গক্ষেত্র দ্বারা পূর্ণ হলে, প্রত্যেক কোণের মান এক সমকোণ ; এবং তিনটি ষড়ভুজ দ্বারা পূর্ণ হলে তাদের প্রত্যেকটি কোণের মান $1\frac{1}{3}$ সমকোণ। কিন্তু তিনটি পঞ্চভুজ দ্বারা পূর্ণ করলে এই দেশ সম্পূর্ণরূপে পূর্ণ হবে না,—সামান্য খালি থেকে যাবে ; আবার, চারটি পঞ্চভুজ দিয়ে ওই দেশ পূরণ করতে গেলে বেশী জায়গা চাই। কারণ, পঞ্চভুজের তিনটি কোণের মান চার সমকোণের চেয়ে কম (প্রতিটি কোণ $1\frac{1}{5}$ সমকোণ), আর চারটি কোণের মান চার সমকোণের চেয়ে বেশী। আবার, তিনটি সপ্তভুজকেও পাশাপাশি স্থাপন করা যাবেনা কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করে কোন দেশ পূরণের জন্য। কারণ, সপ্তভুজের তিনটি কোণ চার সমকোণের চেয়ে বড় (প্রত্যেক কোণ $1\frac{3}{7}$ সমকোণ)। একই যুক্তি অষ্টভুজ, নবমভুজ ইত্যাদির ক্ষেত্রে সম্প্রসারিত করা যেতে পারে।

তা হলে কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করে একই দেশ পূর্ণ করতে পারে, এমন তিনটি মাত্র জ্যামিতিক চিত্র আছে,—**সমবাহু ত্রিভুজ, বর্গক্ষেত্র ও ষড়ভুজ**। মৌমাছিরা তাদের **প্রবৃত্তি**-র (***instinct***) সাহায্যে এই তিনটির মধ্যে যার **বাহু-সংখ্যা** বেশী সেইটি নির্বাচন করল। কেন ? কারণ, এরকম জ্যামিতিক আকারবিশিষ্ট চিত্রেই বেশী পরিমাণ মধু ধরবে।

সুতরাং মৌমাছিরা এটা জানে ত্রিভুজ, বর্গক্ষেত্র ও ষড়ভুজের মধ্যে কোনটি অধিকতর উপযোগী এবং এও জানে ত্রিভুজ ও বর্গক্ষেত্রের, চেয়ে ষড়ভুজে অধিক পরিমাণ মধু ধরে ; আর এটি নির্মাণে অপর দু-ধরনের চেয়ে বেশী পরিমাণ মালমশলা লাগবেনা—একই লাগবে।

কিন্তু মানুষ সৃষ্টির শ্রেষ্ঠতম প্রাণী। পশুপাখী, কীটপতঙ্গের চেয়ে আমাদের বুদ্ধি, বিচারশীলতা ও প্রজ্ঞা তুলনাহীন পরিমাণ। তাই আমাদের বৃহত্তর সমস্যা সম্পর্কে গবেষণা ও সমাধান করতে হয়। কি সমস্যা ? যে-সব সমবাহু ও সদৃশকোণী সামতলিক জ্যামিতিক চিত্রের একই পরিসীমা, তাদের মধ্যে যার কোণ-সংখ্যা

অধিক, তা সর্বদাই বৃহত্তর ; এবং তাদের মধ্যে সবচেয়ে বড় হলো বৃত্ত যার পরিসীমা অন্যগুলির সমান।*

প্যাপসের গাণিতিক প্রতিভায় সূর্যের দীপ্তি নেই সত্য, কিন্তু চন্দ্রের স্নিগ্ধতা আছে। গ্রীক গণিতের বিখ্যাত ঐতিহাসিক **J. Gow** তাঁর প্রশংসা না করে পারেননি। তাঁর **A short History of Greek Mathematics** গ্রন্থে বলেছেন,—**"He looks back from a distance of 500 years, to find his peer in Apollonius."** অ্যাপোলোনিয়াসের প্রতিভার সঙ্গে তাঁর তুলনা চলেনা, কিন্তু তাঁর প্রতিভা তুচ্ছ বা উপেক্ষণীয় নয়।

* Treasury of Mathematics, Vol-I, Page—397-399.

থিওন

(আনুমানিক 390 খ্রীস্টাব্দ)

> "To master mathematical speculation,
> Carefully learn to reduce your education
> By an adequate transformation.
> Till the formulas are devoid of interpretation".
>
> L. Kurd.*

গ্রীক গণিতের শেষ পর্যায় অবক্ষয়ের যুগ। এই যুগে সৃজনশীল গণিতজ্ঞের আবির্ভাব হয়নি, কেবল চর্বিতচর্বণ হয়েছে মাত্র। এই অবক্ষয় ও বিপর্যয়ের প্রধান কারণ রাজনৈতিক, অর্থনৈতিক, সামাজিক ইত্যাদি। ইতিহাসের প্রেক্ষাপটে এ-সবের বিচার-বিশ্লেষণ করলে তবেই গ্রীক গণিতের গৌরবময় যুগের অধঃপতনের কারণ সুস্পষ্ট হয়। এই গ্রন্থের শেষ পর্যায়ে আমরা এ-বিষয়ে সংক্ষিপ্ত মূল্যায়ন ও পর্যালোচনার প্রয়াস পাব।

প্যাপাসের পর গ্রীক গণিতের অন্তিম লগ্নে যাঁরা গণিতচর্চা অব্যাহত রাখার প্রয়াস পেয়েছিলেন, তাঁদের সবার নাম উল্লেখ করার অবকাশ ও সুযোগ আমাদের এই গ্রন্থে নেই। কারণ, এখানে আমরা প্রধানত গ্রীক গণিতের মুখ্য রূপকারদের কথাই বলেছি, আর তাঁদের গাণিতিক অবদান বিষয়ে অতি সংক্ষিপ্ত আলোচনা করেছি। আগ্রহী পাঠক-পাঠিকা যে, গ্রীক গণিতের কোন প্রামাণিক ইতিহাস পাঠ করবেন, তা বলাই বাহুল্য।

আলেকজান্দ্রিয়ার **থিওন** হচ্ছেন প্যাপাসের সমসাময়িক গণিতজ্ঞ। গণিতে তাঁর মৌলিক ও সৃজনাত্মক প্রতিভা ছিল না। ইনি প্রধানত মধ্যযুগের ভারতীয় গণিতজ্ঞদের মত ভাষ্যকার। পূর্বসূরী গণিতজ্ঞদের গ্রন্থের সম্পাদনা ও টীকা-ভাষ্য রচনার মধ্যেই ইনি নিজেকে নিয়োজিত করেছিলেন। ইনি যে গণিতের শিক্ষক ছিলেন, তাতে সন্দেহ নেই। ইউক্লিডের মূল **এলিমেন্টস** গ্রন্থটি ছাত্রদের পড়ানো যে খুবই অসুবিধাজনক, তা বুঝতে তাঁর বিলম্ব হয় নি। তাই, এলিমেন্টস পড়ানোর জন্য তিনি ওই গ্রন্থটি ছাত্রদের উপযুক্ত করে সম্পাদনা করেছিলেন। মনে হয়, তাঁর সম্পাদিত ইউক্লিড থেকেই তিনি শিক্ষা দিতেন। তিনি টলেমীর **অ্যালমাজেস্ট** গ্রন্থের টীকা রচনা করেন। এটি খুবই মূল্যবান বলে বিবেচিত হয়। কারণ, এর মধ্যে বহু মূল্যবান ঐতিহাসিক তথ্য আছে।

---

* উদ্ধৃতিটি প্রদীপকুমার মজুমদারের 'আমাদের দৃষ্টিতে গণিত' পৃ—103 থেকে গৃহীত।

থিওনের অবদানের কথা বলতে গেলে প্রথম যে কথাটি মনে আসে, তা হলো তাঁর রচনাবলী অবলম্বনে বিজ্ঞানের ইতিহাস রচনা সুবিধা হয়। গ্রীক পাটীগণিত সম্বন্ধে যা সামান্য ধারণা করা যায়, তা-ও তাঁর অ্যালমাজেস্টের টীকার ওপর নির্ভর করেই। গণিতে থিওনের অন্তত একটি মহৎ অবদান আছে। তা হচ্ছে বর্গমূল নির্ণয়ের নিয়ম। অবশ্য তাঁর পদ্ধতি ষষ্ঠিক ভগ্নাংশ-এর বর্গমূল নির্ণয় সম্পর্কিত।

থিওনের বর্গমূল নির্ণয়ের নিয়ম

বর্গমূল নির্ণয় করতে হলে আমাদের প্রথমেই নিকটবর্তী বর্গসংখ্যার মূল নিতে হবে ; তারপর একে দ্বিগুণ করতে হবে এবং অবশিষ্টকে মিনিটে পরিণত করে ভাগ করতে হবে। তারপর ভাগফলের বর্গ বিয়োগ করে অবশিষ্টকে সেকেণ্ডে পরিণত করে ডিগ্রী ও মিনিটের দ্বিগুণ (সমগ্র ভাগফল) দ্বারা ভাগ করতে হবে। এইভাবে আমরা বর্গের আসন্ন মূল পাব।[১]

আধুনিক গণিতের ভাষায় থিওনের নিয়ম এইভাবে প্রকাশ করা যেতে পারে ঃ

$$\sqrt{A}=a+\frac{r}{2a}-\frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a+\frac{r}{2a}\right)}$$

থিওন 4500-এর বর্গমূল এরূপ নির্ণয় করেছেন,—

$$\sqrt{4500}=67\ 4'\ 55''$$

বর্গমূল নির্ণয় সম্পর্কে **Kaye, Smith** প্রমুখ পণ্ডিতরা মন্তব্য করতে গিয়ে ভারতীয় কৃতিত্বের অবমূল্যায়ন করেছেন। তাঁরা বলেন, ভারতীয় গণিতজ্ঞরা গ্রীকদের কাছ থেকেই এই পদ্ধতি শিখেছেন, আর দূতিয়ালীর কাজ করেছে আরবরা। বস্তুত, প্রাচীন ভারতীয় গণিত সম্পর্কে সুস্পষ্ট জ্ঞানের অভাবের জন্যই এরকম হয়েছে মনে হয় ; আবার কোন কোন ক্ষেত্রে দেখা যায়, সচেতনভাবেই তাঁরা এই অবমূল্যায়নের কাজে নেমে পড়েছেন। সত্য কথা বলতে কি, পাশ্চাত্য পণ্ডিতদের কাছে গ্রীস ছাড়া অন্য কোন দেশ, বিশেষত ভারতবর্ষ প্রাচীনকালে জ্ঞান-বিজ্ঞানের আলোকে উদ্ভাসিত হয়েছিল,—এরূপ ধারণা করাই কঠিন। প্রাচীন ভারতীয় জ্ঞান-বিজ্ঞানের সহিত গ্রীসের কোন সাদৃশ্য দেখলেই তাঁরা মনে করেন ভারত গ্রীসের নিকট ঋণী। এই সম্পর্কে আচার্য রমেশচন্দ্র মজুমদারের মন্তব্যটি প্রণিধানযোগ্য ঃ "ভাগ্যক্রমে প্রাচীন গ্রীস বা রোমে এই পদ্ধতির (দশগুণোত্তর)

১. History of Mathematics (Vol-II)—D. E. Smith, Page—145

২. প্রাচীন ভারতে বিজ্ঞানচর্চা—রমেশচন্দ্র মজুমদার, পৃ—27-28 (বন্ধনীকৃত লেখা গ্রন্থকারের)

কোনো নিদর্শন পাওয়া যায় নাই। নচেৎ ইউরোপীয় লেখকরা নিশ্চিত দাবী করিতেন যে ভারতবর্ষ ঐসব দেশ হইতেই এই শিক্ষা লাভ করিয়াছে। কিন্তু কোনো নিদর্শন না থাকিলেও অনেক স্থলে ইউরোপীয়েরা বিশ্বাস করেন যে গ্রীসে নিশ্চয়ই ইহা ছিল, এবং ভারতবাসী গ্রীস হইতেই ইহা শিখিয়াছে।"[২] প্রসঙ্গত উল্লেখযোগ্য, থিওনের নিয়মটি প্রাচীন ভারতের আর্যভট পূর্ববর্তী গ্রন্থ **বকশালী পাণ্ডুলিপি**-তে দেখতে পাওয়া যায়। যাই হোক, বর্গমূল নির্ণয়ের নিয়ম যে-দেশেই প্রথমে আবিষ্কৃত হোক না কেন, তাতে থিওনের কৃতিত্ব ম্লান হয় না; তিনি হয়তো স্বাধীনভাবেই এই সূত্র আবিষ্কার করে থাকবেন।

হাইপেসিয়া

(আনুমানিক 370-415 খ্রীস্টাব্দ)

"On the lecture slate
The circle rounded under female hands
With flawless demonstration."

Tennyson.

গণিত প্রধানত পুরুষ-প্রধান। কাব্য-সাহিত্য-দর্শনে মহিলার সাক্ষাৎ পাওয়া দুর্লভ নয়,—প্রাচীনকাল থেকে আধুনিক যুগ পর্যন্ত বেশ কয়েকজনের নাম করা যায়। কিন্তু গণিতে তেমন উজ্জ্বল প্রতিভার সাক্ষাৎ পাওয়া যায় না, কি প্রাচীন যুগে কি আধুনিক যুগে। অন্তত আর্কিমিডিস-নিউটন-গাউসের সঙ্গে তুলনীয় এমন একজন মহিলা গণিতজ্ঞ অদ্যাবধি দেখা যায়নি। প্রায় এক হাজার বছরের যে গ্রীক গণিতের ইতিহাসের পরিচয় পেয়েছি, তাতে কোন মহিলা গণিতজ্ঞের সাক্ষাৎ আমরা পাইনি। কিন্তু বিশ্বের প্রথম মহিলা গণিতজ্ঞের আবির্ভাব গ্রীসেই হয়েছিল,—গ্রীক যুগের শেষপর্বে। আরো অন্তত পাঁচ শ' বছর আগে যদি এরূপ সম্ভব হতো, তা হলে বিশ্ববাসী যে একজন প্রথম শ্রেণীর মহিলা গণিতজ্ঞ পেত, তাতে সন্দেহ নেই। কিন্তু যা হয়নি, তা নিয়ে আক্ষেপ করার না থাকলেও ঐতিহাসিক বিশ্লেষণ করা যেতে পারে। আমরা গ্রন্থের শেষ পর্বে এ-নিয়ে সামান্য বিশ্লেষণ করার প্রয়াস পাব।

হাইপেসিয়া বিদুষী

বিশ্বের প্রথম মহিলা গণিতজ্ঞ হাইপেসিয়া। ইনি আলেকজান্দ্রিয়ার গণিতজ্ঞ ও বিখ্যাত টীকাকার থিওনের কন্যা। আমাদের দেশেও শ্রেষ্ঠ গণিতজ্ঞ ত্রয়ীর অন্যতম ভাস্করাচার্যের কন্যা **লীলাবতী**-র গণিতজ্ঞ হিসাবে প্রবাদ আছে,—

ঐতিহাসিক সত্যতা নেই। **সিদ্ধান্ত-শিরোমণি**-র লীলাবতী অংশ ভাস্করের রচনা না তাঁর কন্যার রচনা, এ-বিষয়ে নিশ্চিত সিদ্ধান্ত করা সম্ভব নয়। তবে গ্রন্থ ও তার নানা টীকা-ভাষ্য থেকে এরূপ অনুমান করা হয় এই অংশটি ভাস্করেরই রচনা,— তাঁর কন্যা বা তার নামের সঙ্গে এর কোন সংশ্রব নেই। হাইপেসিয়া সম্পর্কে জনশ্রুতি আছে, তাঁকে নিয়ে নাটক-উপন্যাস রচিত হয়েছে সত্য, কিন্তু তাঁর ঐতিহাসিকতা অবিসংবাদিত। তিনি গণিতজ্ঞ ছিলেন। শুধু তাই নয়, দর্শনেও তাঁর গভীর পাণ্ডিত্য ছিল। আনুমানিক **370** খ্রীস্টাব্দে আলেকজান্দ্রিয়ায় তাঁর জন্ম হয়।

পিতা থিওনের অধীনে তাঁর গণিত শিক্ষা শুরু হয়। কালক্রমে হাইপেসিয়া গাণিতিক প্রতিভায় পিতাকেও ছাড়িয়ে যান এবং দর্শনেও ব্যুৎপত্তি লাভ করেন। গণিতের ঐতিহাসিকরা বলেন, হাইপেসিয়া নিশ্চিতরূপে থিওনের চেয়েও অধিক প্রতিভার অধিকারী ছিলেন। হাইপেসিয়া নব্য প্লেটোনীয় গোষ্ঠীর নেতা **ইসিডোরাস**-কে বিবাহ করেন এবং ক্রমে এই গোষ্ঠীর নেত্রীর পদে আসীন হন। অবশ্য সে-রকম যোগ্যতা ও ক্ষমতা তাঁর ছিল। যেমন ছিল তাঁর গণিতে প্রতিভা, তেমনি ছিল দর্শনের ওপর প্রাগাঢ় পাণ্ডিত্য।

জীবনের ট্রাজেডী

হাইপেসিয়ার ব্যক্তিজীবন বড় করুণ। কিছুটা যেন দিল্লীর সুলতানা রিজিয়ার মত। রিজিয়াকে প্রাণ দিতে হয়েছিল, কিন্তু তাঁর সম্মানজনক মৃত্যু হয়েছিল। হাইপেসিয়ার মৃত্যু অপমানজনকভাবে হয়েছিল,— মানব ইতিহাসের কলঙ্ক!

তিনি ছিলেন বিদুষী ও অসাধারণ রূপসী। রূপ ও গুণের একত্র সমাবেশ বোধ করি শুভ নয়। কাব্য-পুরাণে এমন অনেক ঘটনা ও কাহিনী দেখতে পাওয়া যায় রূপেগুণে অসামান্য রমণীদের জীবন সুখের হয় না। সীতা, ডেসডিমনা প্রমুখ তার উদাহরণ। হাইপেসিয়ার জীবনও সুখের হয়নি। কেবল সুখ নয়, নীতি ও আদর্শের জন্য তাঁকে নৃশংসভাবে হত্যা করা হয়েছিল।

তখন রোমান যুগ। খ্রীস্টধর্ম আধিপত্য বিস্তার করে চলেছে। রোমান সম্রাটরা রাজনৈতিক কারণে খ্রীস্টানদের পৃষ্ঠপোষকতা করতে বাধ্য হয়েছিল। গ্রীকদের প্রতি ছিল খ্রীস্টানদের ঘৃণা ও বিদ্বেষ। তারা গ্রীকদের বিধর্মী বলত ও ক্ষতিসাধন করার চেষ্টা করত। ধর্মীয় উন্মাদনা যে মানব জাতির কী অপরিমেয় ক্ষতিসাধন করে, এটি তারই একটি প্রকৃষ্ট উদাহরণ। একজন বিজাতীয় গ্রীক নারীর যশ ও প্রতিষ্ঠা তখনকার খ্রীস্টান ধর্মযাজকদের কাছে অসহ্য হয়ে উঠেছিল। খ্রীস্টান ধর্মের জিগির তুলে সেণ্ট সিরিল (St. Cyril) প্ররোচনা দিতে থাকেন। উন্মত্ত ও ক্ষিপ্ত জনতা তখন **"scraped her naked body with oyster shells"**. মানবজাতির লজ্জা ও কলঙ্কের এমন ইতিহাস আর আছে কিনা সন্দেহ। এই

সেণ্ট সিরিলের খুল্লতাত আর্চবিশপ থিওফিলাস সম্বন্ধে Decline and Fall of Roman Empire-এর লেখক গিবন বলেছেন,—"the perpetual enemy of peace and virtue, a bold bad man, whose hands were alternately polluted with gold and blood".[৩] থিওফিলাসই 390 খ্রীস্টাব্দে আলেকজান্দ্রিয়ার ঐশ্বর্যপূর্ণ গ্রন্থাগারের বৃহৎ অংশ ধ্বংসের আদেশ দেন। এইভাবে 415 খ্রীস্টাব্দে অকালে হাইপেসিয়ার জীবনদীপ নিভে আসে।

গণিতে অবদান

দুর্ভাগ্যের বিষয়, হাইপেসিয়ার গাণিতিক প্রতিভার প্রকৃত মূল্যায়ন আজ আর সম্ভব নয়। কারণ, তাঁর রচিত কোন গ্রন্থ এখন পাওয়া যায় না,—সব অবলুপ্ত হয়ে গেছে। তবে তিনি বিখ্যাত জ্যামিতিকার অ্যাপোলোনিয়াসের কনিক জ্যামিতির টীকা-ভাষ্য রচনা করেন, এবং ডায়োফ্যাণ্টাসের অ্যারিথমেটিকার ওপরেও টীকা রচনা করেন। খুব সম্ভব, এই দুইটি বিষয়ের উপর তিনি শিক্ষাদান করে থাকবেন।

প্রোক্লাস

(410-485 খ্রীস্টাব্দ)

"The Chemist smiles at the childish efforts of alchemists, but the mathematician finds the geometry of the Greeks and the arithmetic of the Hindoos as useful and admirable as any research of to-day."

F. Cajori

নব্য প্লেটোনীয় যুগের শীর্ষস্থানীয় প্রতিনিধি হচ্ছেন প্রোক্লাস। মাত্র তিরিশ বছর বয়সে তিনি এথেনীয় অ্যাকাডেমীর অধ্যক্ষ হন। প্রোক্লাসকে '**ডায়াডোকাস প্লেটোনিকাস**' (**Diadochus Platonicus**) অভিধার ভূষিত করা হয়। কারণ, প্লেটোর অ্যাকাডেমীর প্রধান হিসাবে উচ্চপদের মহিমা-সূচকই নয়, তাঁর চরিত্রে প্লেটোর চারিত্রিক গুণ ও আদর্শের বহুল সমাবেশ দেখা যায়। প্লেটো ও প্রোক্লাস উভয়েই অভিজাত ধনী পরিবারে জন্মগ্রহণ করেন। উভয়ের দৈহিক সৌন্দর্য ও মুগ্ধকর ব্যক্তিত্ব ছিল। তা ছাড়া উভয়ের কার্যাবলী ছিল উচ্চ নৈতিক আদর্শ প্রণোদিত। প্রোক্লাসের সময়ে অ্যাকাডেমীর খ্যাতি ও প্রভাব বিস্তারিত হয়।

---

৩. **উদ্ধৃতিটি সমরেন্দ্রনাথ** সেনের বিজ্ঞানের ইতিহাস, (প্রথম খণ্ড), পৃ—275 থেকে গৃহীত।

প্রোক্লাসের পরিচয়

410 খ্রীস্টাব্দে প্রোক্লাস বাইজানটিয়াম-এ (**Byzantium**) জন্মগ্রহণ করেন। তাঁর জন্মগ্রহণের অল্পকালের মধ্যে তাঁর পিতামাতা তাঁকে লিসিয়া-র (**Lycia**) জানথুস (**Xanthus**) শহরে নিয়ে আসেন। তাঁর বাল্যকালের শিক্ষা এই জানথুস শহরেই হয়। পিতার আইন ব্যবসায় নিজেকে শিক্ষিত করার জন্য তিনি আলেকজান্দ্রিয়ার রোমান স্কুলে ভর্তি হন। এই সময় এই গ্রীক শিক্ষক ছান্দসিক ও আলঙ্কারিক লিওনাস (**Leonus**) ও বৈয়াকরণিক ওরিয়ন (**Orion**)-এর কাছেও শিক্ষালাভ করেন। প্রোক্লাস আইন পড়ায় মনোযোগ দিতে পারেননি ; রোমান আইনের চেয়ে তাঁর দর্শন ও অলঙ্কার প্রিয় হয়ে ওঠে। তাই যখন লিওনাস বাইজানটিয়াম ভ্রমণে যান, তিনিও তাঁর গুরুর সঙ্গী হন।

আলেকজান্দ্রিয়ায় ফিরে এসে তিনি গণিত ও অ্যারিস্টটল নিয়ে পড়াশোনা করেন। কিন্তু দর্শনচর্চার শ্রেষ্ঠ পীঠস্থান ছিল এথেন্স। তাই তিনি এখানে এলেন। তিনি তৎকালীন অ্যাকাডেমীর অধ্যক্ষ প্লুতার্ক-এর সংস্পর্শে এলেন যখন তাঁর বয়স কুড়ি হয়নি। প্রোক্লাসের আচরণ ও বিদ্যা অর্জনে ক্ষমতা লক্ষ করে বৃদ্ধ প্লুতার্ক এমনই বিমোহিত হলেন যে, তাঁকে নিজ পুত্রের মত গৃহে স্থান দিলেন। প্লুতার্কের নিকট দীক্ষিত হয়ে শ্রেষ্ঠ দর্শনসমূহের ভাষ্য রচনায় নিযুক্ত হলেন প্রোক্লাস। প্লুতার্কের মৃত্যুর পর **সাইরিয়ানাস**-এর (**Syrianus**) সাথী হিসাবে যেন পরবর্তী অধ্যক্ষতার শিক্ষা গ্রহণ করলেন। নানা বিষয়ে তাঁর গভীর জ্ঞানের জন্য তাঁকে কেউ কেউ **'Prince of all Sciences'** বলেন।

এ-যুগ বিশেষজ্ঞের যুগ। জ্ঞান-বিজ্ঞানের এমন বিস্ফোরণের যুগে এমন হওয়াই স্বাভাবিক। কারণ, এখন একটিমাত্র বিষয়ের ওপর সম্যক জ্ঞানলাভ করাই দুরূহ ব্যাপার। কিন্তু সে-যুগ বিশেষজ্ঞের যুগ ছিলনা,—একই ব্যক্তি বহু বিষয়ের ওপর জ্ঞান ও পাণ্ডিত্য অর্জন করতে পারতেন। প্রোক্লাসকে বিশ্বকোষ বলা না গেলেও, তাঁর নানা বিষয়ের ওপর অবাধ অধিকার ছিল। কাব্য, সাহিত্য, দর্শন, গণিত ইত্যাদিতে তাঁর অনুরাগ ও আগ্রহ দেখা যায়। দর্শনে তাঁর পাণ্ডিত্যের কথা না বললেও চলে, কিন্তু গণিতে ব্যুৎপত্তি প্রথম শ্রেণীর গণিতজ্ঞের মত না হলেও উল্লেখযোগ্য নিঃসন্দেহে। প্লেটোর মত তিনি বিশ্বাস করতেন **"mathematics is the handmaiden to philosophy".** তিনি মনে করতেন, গণিত হচ্ছে দর্শন-পাঠের প্রাথমিক প্রস্তুতি। গণিতের সাহায্যেই স্বচ্ছ দৃষ্টিলাভ ঘটে, ইন্দ্রিয় যে চোখে বিশ্বব্রহ্মাণ্ডের ধারণা করে তার পরিশুদ্ধি ও বিশ্বস্ততা গণিতপাঠের মাধ্যমেই সম্ভব।

গণিতে অবদান

বস্তুতপক্ষে, গণিতে প্রোক্লাসের মৌলিক কোন অবদান নেই। তবে দর্শন,

গণিত ও জ্যোতির্বিজ্ঞানে তাঁর পাণ্ডিত্য ছিল। তাঁর খ্যাতি মূলত ইউক্লিডের জ্যামিতির টীকা-ভাষ্য রচনা করার জন্য। তাঁর *Commentary*-কে প্রামাণিক গ্রন্থ বলে বিবেচনা করা হয়। কারণ, **"This commentary is important because Proclus had access to works now lost, including the *History of Geometry* by Eudemus and the book of Geminus that was probably titled the *Doctrine* or the *Theory of Mathematics*".**[৪]

হিপারকাস ও টলেমীর জ্যোতির্বিজ্ঞানের ওপর মনোরম উপক্রমণিকা রচনা তাঁর আর এক কীর্তি। "এই উপক্রমণিকার বিশেষত্ব এই যে, জলঘড়ির সাহায্যে সূর্যের আপাত ব্যাস নির্ধারণ করিবার এক পদ্ধতি, সূর্যের বলয়-গ্রাসের উল্লেখ এবং আরও কতকগুলি নূতন বিষয় ইহাতে আলোচিত হইয়াছে।"[৫]

বক্ররেখার নানা ধর্ম নিয়ে স্বাধীনভাবে সামান্য আলোচনা ছাড়া তাঁর গণিতে উল্লেখ করার মত অবদান নেই। কিন্তু গণিত বিষয়টি সম্পর্কে স্বচ্ছ ধারণা, এবং এই বিষয়টি পাঠের ফল কি, তা তাঁর অজানা ছিল না। গণিত পাঠের প্রয়োজনীয়তা সম্পর্কে তিনি বলেছেন,—**"This, therefore, is mathematics; she reminds you of the invisible form of the soul; she gives life to her own discoveries; she awakens the mind and purifies her intellect; she brings light to our own intrinsic ideas; she abolishes oblivion and ignorance which are ours by birth."**

একটি বৈপরীত্য

যিনি শাণিত যুক্তি-তর্কের মাধ্যমে দর্শন আলোচনা করেন, সত্যের অনুসন্ধান করেন আর গাণিতিক সূক্ষ্মতা যাঁর চেতনাকে আচ্ছন্ন করে রাখে, তিনি কী করে অবৈজ্ঞানিক অন্ধ কুসংস্কারে আচ্ছন্ন হন, তা খুবই আশ্চর্যের কথা! মনে হয়, শিক্ষাগত যোগ্যতা ও বিদ্যাপীঠীয় আলোচনা এক, আর প্রকৃত সুশিক্ষিত হওয়া আর এক রকম। যুক্তি দিয়ে যা মানা যায় না, অনেক সময় দেখা যায় জ্ঞানী ব্যক্তিও লোকাচার হিসাবে মানেন। এখনো আমরা অসদাচাররূপী লোকাচার ত্যাগ করতে পারিনি,—তাগা-মাদুলি, কোষ্ঠী, গ্রহ-তারকাদের অমোঘ নিয়ন্ত্রণ কাটিয়ে উঠতে পারিনি। সাধারণ অশিক্ষিত মানুষের কথা ছেড়ে দিলেও আমাদের অনেক জ্ঞানীগুণী ও বিজ্ঞানীরাও পারেননি। প্রোক্লাসও তাই। তিনিও পারেননি। তাঁর নানা গল্প-উপকথায় বিশ্বাস ছিল, আর ছিল প্রাগাঢ় বিশ্বাস

---

৪. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times—M. Kline, Page—129**

৫. বিজ্ঞানের ইতিহাস (প্রথম খণ্ড)—সমরেন্দ্রনাথ সেন, পৃ—305

ধর্মের রহস্যবাদিতায়। নানা দেবদেবী তিনি বিশ্বাস করতেন, গ্রীক দেবদেবীই হোক আর অন্য দেশের দেবদেবীই হোক। বস্তুত, গ্রীসের শ্রেষ্ঠ সন্তানগণ প্রকৃত বুদ্ধিবাদী ও যুক্তিতর্কের ধারক ও বাহক ছিলেন সত্য, কিন্তু সাধারণ গ্রীকরা কখনো কুসংস্কার, রহস্যবাদিতা ও পৌত্তলিকতার ঊর্ধ্বে উঠতে পারেনি। এদিক থেকে বিচার করলে, প্রোক্লাস অধঃপতিত গ্রীক সমাজের প্রতিভূ ব্যতিরেকে আর কিছু নন। তিনি টলেমীর তত্ত্ব প্রত্যাখ্যান করেছিলেন। কারণ,—" a Chaldean 'whom it is not lawful to disbelieve' thought otherwise."

প্রোক্লাসের জীবনের এইসব টুকরো টুকরো ঘটনা থেকে স্বতঃই মনে হয় আলেকজান্দ্রিয় সভ্যতা ও সংস্কৃতির সঙ্কটাবস্থা বহু পূর্ব থেকেই সৃষ্টি হয়েছিল। বস্তুত, খ্রীস্টীয় শতাব্দীর প্রারম্ভকাল থেকেই যে এইরূপ অবস্থা ক্রমশ ঘনীভূত হচ্ছিল, তার উল্লেখ ইতিপূর্বে আমরা করেছি। মধ্যযুগীয় কুসংস্কার, গোঁড়ামী, বিশ্বপ্রকৃতির ঘটনাবলী সম্পর্কে স্বচ্ছ ও নিরপেক্ষ দৃষ্টিভঙ্গী তখন ক্রমশ জনজীবন ও তার প্রতিনিধিদের জীবনকে গ্রাস করে ফেলছিল।

প্রোক্লাসের মৃত্যু হয় **485** খ্রীস্টাব্দে। আর মাত্র তিরিশ-পঁয়ত্রিশ বছর বিশ্বের প্রথম বিশ্ববিদ্যালয় **অ্যাকাডেমী**-র অস্তিত্ব বজায় ছিল। অবশেষে **জাস্টিনিয়ান 529** খ্রীস্টাব্দে এই বিদ্যাপীঠের দরজা চিরতরে বন্ধ করে দেন।

ষোড়শ অধ্যায়
কয়েকজন অপ্রধান গণিতজ্ঞ

"All science, logic and mathematics included, is a function of the epoch—all science, in its ideals as well as in its achievements."

E. H. Moore.

গ্রীক গণিতের উদ্ভব, বিকাশ ও সমৃদ্ধির আলোচনায় আমরা প্রধানত অনন্য প্রতিভাশালী ও দু-একজন অপ্রধান গণিতজ্ঞদের কথা তুলে ধরেছি। নিঃসন্দেহে প্রতিভাশালীরা সভ্যতা ও সংস্কৃতির উদগাতা ও ঋত্বিক। কিন্তু তাঁরাই যাগ-যজ্ঞ-হোমাদির সব অনুষ্ঠান সম্পন্ন করেন না ; তাঁরা পথ দেখান, নির্দেশ দেন, বিধি-নিয়মের দুরূহতা ও জটিলতা দূর করেন ; আবার নতুন নতুন পথের নিশানাও দেন। কিন্তু আর সব কাজ করেন অপ্রধানরা। তাঁদের প্রতিভার ঔজ্জ্বল্য নেই সত্য, তাঁরা অভিনব কিছু সৃষ্টি করেন না ঠিক, কিন্তু তাঁরা সভ্যতা-সংস্কৃতি-ঐতিহ্যের ধারা ও প্রবাহমানতা বজায় রাখেন। এটা কম পাওনা নয়। বস্তুত, প্রতিভাশালীদের বোঝার ক্ষমতা তাঁদের থাকে, আর সহজ-সরল করে ব্যাখ্যা দেওয়ায় তাঁরা অননুকরণীয় বললে অত্যুক্তি হয় না। সেইজন্য গণিতের ইতিহাসে তাঁদের স্থান যেমন অবশ্যই আছে, তেমনি তাঁদের ভূমিকাও শ্রদ্ধার সঙ্গে স্মরণীয়। কিন্তু দুঃখের ও দুর্ভাগ্যের বিষয়, তাঁদের সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা প্রায় নেই বললেই চলে। তবুও আমরা গ্রীক গণিতের এই সংক্ষিপ্ত আলোচনায় কয়েকজন গণিতজ্ঞের নামোল্লেখ এবং গণিতে তাঁদের অবদান সম্পর্কে সামান্য আলোচনা করব।

অ্যানাক্সাগোরাস

থ্যালেস ও পীথাগোরাস যে বিজ্ঞান-ভাবনার অনুবর্তী ছিলেন, তাঁদেরই উত্তরসূরী হিসাবে অ্যানাক্সাগোরাসকে দেখতে পাওয়া যায়। তিনি প্রায় পীথাগোরাসের সমসাময়িক এবং আয়োনীয় সম্প্রদায়ভুক্ত দার্শনিক ছিলেন। তাঁর দর্শনের মূলমন্ত্র ছিল **'যুক্তি বিশ্বশাসন করছে'** (**'reason rules the world'**)। দর্শনে অধিক আগ্রহী হলেও তাঁর গণিতে অনুরাগ ছিল। বৃত্তের বর্গীকরণ ও চিত্রাঙ্কনবিদ্যার ওপর তাঁর লেখা আছে। অ্যানাক্সাগোরাস ছিলেন বিখ্যাত **ইউরিপিডিস** ও পেরিক্লিসের শিক্ষক ও বন্ধু। নির্ভীক জ্যোতির্বৈজ্ঞানিক চিন্তা-ভাবনার জন্য তিনি এথেন্সবাসীদের বিরাগভাজন হন। এবং মৃত্যুদণ্ডে দণ্ডিত হন। কিন্তু পেরিক্লিসের প্রচেষ্টায় মৃত্যুদণ্ড মুকুব হয়ে যাবজ্জীবন নির্বাসন দণ্ডে

দণ্ডিত হন। সাধারণ মানুষ চিরকালই বৈপ্লবিক ধারণা ও ভাব স্বাভাবিকভাবে গ্রহণ করতে পারে না। ফলে অনেক প্রতিভা অকালে ঝরে পড়ে, আর মানবজাতির অপূরণীয় ক্ষতি হয়। যাই হোক, অ্যানাক্সাগোরাস এথেন্স ত্যাগের সময় বলেছিলেন, "**It is not I who have lost the Athenians, but the Athenians who have lost me.**"[১] আনুমানিক 499 খ্রীস্টপূর্বাব্দে আয়োনিয়ার ক্লাজোমেন (**Clazomenae**) নামক স্থানে তাঁর জন্ম, এবং মৃত্যু 427 খ্রীস্টপূর্বাব্দে।

ঈনোপিডিস (OEnopides)

পঞ্চম খ্রীষ্টপূর্বাব্দের মাঝামাঝি সময়ে ইনি প্রখ্যাত জ্যোতির্বিজ্ঞানী হিসাবে পরিচিত ছিলেন। নক্ষত্র বিজ্ঞান ও ক্রান্তিকোণ সম্পর্কে তাঁর শিক্ষা হয় মিশরীয় পুরোহিতদের কাছে। বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে কোন সরলরেখার ওপর লম্ব অঙ্কন ও কোন কোণের সমান কোণ অঙ্কন সমস্যা তথা সম্পাদ্য দুটি নাকি তাঁর আবিষ্কার। সৌর বছর 365 দিনের চেয়ে 9 ঘণ্টা কম বলে তিনি মনে করতেন। পীথাগোরীয় সম্প্রদায়ভুক্ত এই জ্যোতির্বিজ্ঞানী খুব সম্ভব 465 খ্রীষ্টপূর্বাব্দে বর্তমান ছিলেন।

ডিমোক্রিটাস (Democritus)

ইনি প্রধানত আণবিক মতবাদের জন্য বিখ্যাত। কিন্তু তাঁর এই মতবাদ মনস্বী প্লেটো ও অ্যারিস্টটল সমর্থন করেননি। গ্রীক সভ্যতার চরম পর্যায়ে এই মতবাদ সমর্থিত হলে পদার্থ ও রসায়ন বিজ্ঞানে সবিশেষ উন্নতি সম্ভব হতো বলে অনেক বিজ্ঞানের ঐতিহাসিক মনে করেন। রেনেশাঁ যুগের পর বিদ্বজ্জনদের দৃষ্টি এদিকে আকর্ষিত হতে থাকে।

ডিমোক্রিটাসের আণবিক মতবাদ অবশ্য তাঁর নিজস্ব উদ্ভাবন বা আবিষ্কার নয়। এই মতবাদের অন্যতম আবিষ্কারক হচ্ছেন তাঁর গুরু **লিউসিপাস**। আণবিকবাদের মূলকথা হলো অণু-পরমাণুর গতি, আবর্ত ও সমন্বয়ের ফলে বিশ্বব্রহ্মাণ্ডের সৃষ্টি। বিশ্বব্রহ্মাণ্ডে পরমাণু ও শূন্যতাই একমাত্র সত্য, পরম শাশ্বত সত্য। তিনি বলতেন, রীতি অনুসারে মিষ্ট-কটু, ঠাণ্ডা-গরম এবং রং আছে ; কিন্তু "**In truth there are atoms and void.**"[২]

আণবিকবাদের জন্য বিখ্যাত হলেও ডিমোক্রিটাসের গণিত, জ্যামিতি ও জ্যোতির্বিজ্ঞানে অনুসন্ধান ছিল। তিনি একই ভূমি ও উচ্চতা বিশিষ্ট শঙ্কু ও চোঙের আয়তনের সঙ্গে পিরামিড ও প্রিজমের আয়তনের সম্পর্ক স্থাপন করেন।

১. History of Mathematics (Vol.-1)—D. E. Smith, Page-79.
২. A History of Sciencc—Dampier,—Page 23.

এমন কি Infinitesimal Calculas-এর ধারণা সৃষ্টিতেও তাঁর অবদান আছে। ইউক্লিড ও অ্যারিস্টটল দু-জনেই তাঁকে **গাণিতিক পরমাণুবাদ**-এর (**mathematical atomism**) প্রবক্তা বলে উল্লেখ করেছেন।

জ্যোতির্বিজ্ঞানেও তিনি প্রকৃত বৈজ্ঞানিক মনোভাবাপন্ন ছিলেন। এ-বিষয়ে অ্যানাক্সাগোরাসের চিন্তাধারার সঙ্গে বেশ মিল দেখতে পাওয়া যায়। তিনি মনে করতেন, নক্ষত্ররা প্রস্তরখণ্ড বিশেষ ; সূর্যও জ্বলন্ত প্রস্তরখণ্ড। আজ চন্দ্রে পাহাড়, বিশাল বিশাল গহ্বর, উপত্যকা ইত্যাদি আবিষ্কৃত হয়েছে। ডিমোক্রিটাসের মনস্বিতায় তা ধরা পড়েছিল। থ্রান্স-এর **অ্যাবডেরা**-য় (**Abdera**) **460** খ্রীস্টপূর্বাব্দে তিনি জন্মগ্রহণ করেন, এবং **357** খ্রীস্টপূর্বাব্দে তাঁর মৃত্যু হয়।

ফিলোলাউস (Philolaus)

ইনি পীথাগোরীয় সম্প্রদায়ভুক্ত দার্শনিক ও জ্যোতির্বিজ্ঞানী, এবং এই সম্প্রদায়ের মতবাদ প্রচার ও প্রসারে অন্যতম অগ্রণী ছিলেন। অগ্নি-কেন্দ্রিক ব্রহ্মাণ্ড পরিকল্পনায় এঁর অবদান আছে ; আকাশে পৃথিবীর গতি সম্বন্ধীয় ধারণা ইত্যাদির জন্য ইনি অ্যানাক্সাগোরাসের মত শাস্তি ভোগ করেন,—পৃথিবীর বার্ষিক গতি প্রচারের জন্য। এই সম্বন্ধে একজন জ্যোতির্বিজ্ঞানের ঐতিহাসিক লিখেছেন, —**"Philolaus also suffered persecution on account of his doctrine of the earth's annual revolution, which so shocked the prejudices of men as to subject him who maintained it to the suspicion of impiety."**[৩]

গণিতজ্ঞ হিসাবে ফিলোলাউসের খ্যাতি না থাকলেও পীথাগোরাসের দর্শন, বিজ্ঞান ও গণিত সম্পর্কে ধ্যান-ধারণা লিপিবদ্ধ করার জন্য তাঁর কাছে আমরা কৃতজ্ঞ। গণিতে ব্যবহৃত শঙ্কুর বর্ণনা তাঁর লেখা থেকে জানতে পারা যায়। আনুমানিক **425** খ্রীস্টপূর্বাব্দে তিনি বর্তমান ছিলেন।

গণিতজ্ঞ—জ্যোতির্বিদ ত্রয়ী

মেটন—ফাইনাস—ইউকটিমন (Meton-Phaeinus-Euctemon)

আধুনিক বিজ্ঞান ক্রমশ জটিলতর হয়ে উঠছে, এবং একই বিষয় নানা শাখায় পল্লবিত হয়ে বিশেষজ্ঞ সৃষ্টি করে চলেছে। তাই, বর্তমানে একক গবেষণার চেয়ে দলগত গবেষণা প্রাধান্য পাচ্ছে। প্রাচীন কালে জ্ঞানের বিস্ফোরণ এ-যুগের মত ঘটেনি। তাই তখন দলগত গবেষণা প্রায় দেখা যায়নি বললেই চলে। কিন্তু দু-একটি ক্ষেত্রে এর ব্যতিক্রম দেখা যায়। যেমন,—খ্রীস্টপূর্ব পঞ্চম শতাব্দীর গ্রীসে মেটন-ফাইনাস-ইউকটিমনের জ্যোতির্বিজ্ঞান সংক্রান্ত গবেষণা। জ্যোতির্বিজ্ঞানে

৩, History of Astronomical Discovery—Thomas Milner, Page-8

এঁদের অবদান সম্পর্কে আলোচনা করতে গেলে কে কোন্ বিষয়ে বিশেষ বিশেষ অবদান রেখে গেছেন, তা নির্ণয় করা দুষ্কর।

চতুর্থ খ্রীস্টপূর্বাব্দের মাঝামাঝি সময়ের দার্শনিক **থিওফ্রেসটাস** (**Theophrastus**) বলেন, ফাইনাস এথেন্সের এক মানমন্দিরে জ্যোতির্বৈজ্ঞানিক পর্যবেক্ষণ করেছিলেন। মেটন এই পর্যবেক্ষণের ভিত্তিতে **মেটনীয়-চক্র** (**Metonic cycle**) গড়ে তুলেছিলেন। এই মেটনীয়-চক্রের প্রকৃত আবিষ্কারক নিয়ে মতভেদ আছে। ইতিহাস থেকে দেখা যাচ্ছে, চীন দেশে এই পদ্ধতি মেটনের দেড় হাজার বছর পূর্বেও প্রচলিত ছিল। "১৯ বৎসরে (৩৬৫¼ দিনে বৎসর) এক দীর্ঘ বৎসর এবং এক দীর্ঘ বৎসরে ২৩৫ চান্দ্রযুতি হয়। অতএব এক চান্দ্রযুতিতে ২৯·৫৩ দিন হয়। গ্রীক জ্যোতিষে এই দীর্ঘ বৎসরের নাম মেটন-চক্র (**Meton cycle**)।"[৪] মেটনের মতে বছরের দৈর্ঘ্য ঃ

$$365 \text{ দিন} + \text{একদিনের} \frac{1}{76} \text{ অংশ।}$$

টলেমীর মতে, মেটন ও **ইউক্‌টিমন** এথেন্সের বিভিন্ন স্থানে পর্যবেক্ষণ কার্যাদি সম্পন্ন করেছিলেন।

আর্কিটাস (Archytas)

আর্কিটাস প্লেটোর সমসাময়িক। দর্শনে তাঁর বিশেষ অধিকার থাকলেও গণিতেও তাঁর ব্যুৎপত্তি কম ছিল না। তা ছাড়া, সৈন্যাধ্যক্ষ, রাজনীতিবিদ, শিক্ষাবিদরূপেও তাঁর খ্যাতি ছিল। ইনি টরেণ্টামের আর্কিটাস নামে খ্যাত।

চোঙের প্রস্থচ্ছেদ দ্বারা তিনি ঘনকের দ্বিগুণীকরণ সমস্যা সমাধান করেছিলেন বলে জানা যায়। বলবিদ্যায় গণিতের সফল প্রয়োগও তিনি করেছিলেন। তা ছাড়া, সঙ্গীত ও অধিবিদ্যায় বিজ্ঞানের প্রয়োগ অন্যতম উল্লেখযোগ্য ঘটনা বলে স্বীকার করতে হয়।

জ্যামিতিতে তাঁর মৌলিক অবদান আছে, এবং বিষয়টিকে সুশৃঙ্খলভাবে সজ্জিত করণে তাঁর ভূমিকা কৃতিত্বপূর্ণ। তাঁর মধ্যসমানুপাতী সম্বন্ধীয় প্রতিজ্ঞাগুলি মৌলিক আবিষ্কার বলে মনে করা হয়।

পীথাগোরীয় সম্প্রদায়ভুক্ত এই গণিতজ্ঞ বিজ্ঞানের ব্যবহারিক প্রয়োগে উৎসাহী ছিলেন। কিন্তু তাঁর সম্প্রদায়ের সভ্যরা এই দক্ষতা ও নৈপুণ্য ভাল চোখে দেখেনি। সম্ভবত জাহাজ-ডুবি হয়ে তাঁর মৃত্যু হয়।

এই প্রসঙ্গে খ্রীস্টপূর্ব প্রথম শতাব্দীর **Horace** লিখেছেন,—

The scanty present of a little dust
Near the Matinian shore confines thee, O Archytas,
Measurer of the sea, the earth, and the innumerable sand.[৫]

---

৪. বিজ্ঞানের ইতিহাস (প্রথম খণ্ড)—সমরেন্দ্রনাথ সেন, পৃ-104
৫. History of Mathematics (Vol.-I)—D. E. Smith, Page-85

থিওডোরাস (Theodorus)

সাইরেনের (Cyrene) থিওডোরাসের বড় পরিচয় ইনি ছিলেন মনস্বী প্লেটোর অন্যতম শিক্ষাগুরু। পীথাগোরীয়রা যে অমূলদ রাশি আবিষ্কার করেছিল, তার কথা আগেই বলা হয়েছে। প্লেটো অমূলদ রাশিতত্ত্ব সম্পর্কে পাঠ নিয়েছিলেন থিওডোরাসের কাছে। গণিতে প্রাতিভানিক দিকটির প্রতি আকর্ষণ প্রাচীনকাল থেকেই দেখতে পাওয়া যায়। থিওডোরাস গণিতশাস্ত্রকে বিজ্ঞানভিত্তিক করে তুলতে প্রভূত সাহায্য করেছেন। বস্তুত, গণিতের ভিত্তিস্থাপনে তাঁর এই অবদান খুবই মূল্যবান। আনুমানিক 425 খ্রীস্টপূর্বাব্দে ইনি বর্তমান ছিলেন।

থিয়েটেটাস (Theatetus)

অনন্য সাধারণ প্রতিভা হঠাৎ জন্মগ্রহণ করে না। শত শত বা হাজার হাজারও বছর লাগে কখনো কখনো কালিদাস, রবীন্দ্রনাথ, সেক্সপীয়র, নিউটন, আইনস্টাইন প্রমুখ প্রতিভার আবির্ভাব হতে। ভাল ফসল হতে হলে যেমন ক্ষেত্র প্রস্তুত করতে হয়, সচেতনভাবে প্রয়াসী হতে হয়, প্রতিভার ক্ষেত্রেও তেমনি। সমাজ দেশ-কালের অনুকূল পরিবেশ, সভ্যতা-সংস্কৃতি-ঐতিহ্যের শুভ মুহূর্ত না হলে অলৌকিক প্রতিভার উদয় হয় না। বস্তুত, এইজন্য দেশ ও জাতিকে সাধনা করতে হয়। থ্যালেস-পূর্ব যুগ থেকেই গ্রীসের সেই সাধনা শুরু হয়েছিল। দু-শ' বছরের ঐকান্তিক প্রয়াস, সাধনা, ধ্যান ইত্যাদির মধ্য দিয়ে তাই জন্ম নিল প্লেটো ও অ্যারিস্টটল, আর বিজ্ঞানে আর্কিমিডিস। এই মহান ক্ষেত্র প্রস্তুতের শেষ প্রতিনিধি সম্ভবত থিয়েটেটাস,—থিওডোরাস ও সক্রেটিসের শিষ্য। শ্রীনিবাস প্রমুখ যেমন নদীয়ায় গৌরাঙ্গের আহ্বান জানিয়েছিলেন, তেমনি থিয়েটেটাস যেন প্লেটোর আগমন ত্বরান্বিত করলেন।

মনীষী প্লেটো থিয়েটেটাসের গুরুত্ব উপলব্ধি করেছিলেন। তাই তিনি তাঁর প্রশংসায় পঞ্চমুখ ছিলেন। থিয়েটেটাস প্রাথমিক জ্যামিতির বহু ধর্ম আবিষ্কার করেন এবং ঘন বস্তুর ওপর তাঁর লেখাও আছে। জ্যামিতিকার ইউক্লিড তাঁর নিকট অশেষ ঋণে আবদ্ধ, এমন কি ইউডকসাসও। 375 খ্রীস্টপূর্বাব্দে ইনি বর্তমান ছিলেন, এবং 368 খ্রীস্টপূর্বাব্দে তাঁর মৃত্যু হয়।

ডিনোস্ট্রাটাস (Deinostratus)

কনিক সেকসনের প্রামাণিক গ্রন্থ রচনা করেন অ্যাপোলোনিয়াস এবং এই সম্পর্কে তাঁর মৌলিক গবেষণার অভাবও নেই। কিন্তু অ্যাপোলোনিয়াসের পূর্ববর্তী মেনেকমাস এই বিষয়ে মৌলিক গবেষণা করেছিলেন। ডিনোস্ট্রাটাস মেনেকমাসের অনুজ এবং 350 খ্রীস্টপূর্বাব্দে বর্তমান ছিলেন। তাঁর গবেষণা মূলত

কোয়াড্রেটিক্স-কে (**quadratix**) কেন্দ্র করে। কিন্তু তিনি এই বক্ররেখার প্রথম গবেষক নন। তাঁর পূর্বে হিপিয়াস এই সম্পর্কে গবেষণা করেছিলেন, এবং বৃত্তের বর্গীকরণে প্রয়োগ করেছিলেন বলে জানা যায়।

জেনোক্রেটিস (Xenocrates)

প্লেটোর অ্যাকাডেমীর কথা আমরা আলোচনা করেছি। বিশ্বের সর্বপ্রথম এই বিশ্ববিদ্যালয়ের অধ্যক্ষপদ অলঙ্কৃত করার সৌভাগ্য অর্জন করেছিলেন জেনোক্রেটিস। স্পিউসিপাসের পর তিনি এই বিশ্ববিদ্যালয়ের অধ্যক্ষ নির্বাচিত হন, এবং সুসাহিত্যিক হেরাক্লিডিসের সঙ্গে নির্বাচনে প্রতিদ্বন্দ্বিতা করেন।

দার্শনিক ও কূটনীতিবিদ হিসাবে তাঁর খ্যাতি ছিল। তিনি পদার্থবিদ্যা, জ্যামিতি, পাটীগণিত ও জ্যোতিষের ওপর গ্রন্থাদি রচনা করেন; পাঁচ খণ্ডে জ্যামিতির ইতিহাস রচনাও করেছিলেন। কিন্তু বর্তমানে তাঁর সব গ্রন্থই অবলুপ্ত হয়ে গেছে।

প্লেটোর ন্যায় অলৌকিক প্রতিভাসম্পন্ন তিনি ছিলেন না সত্য, কিন্তু তাঁকে দ্বিতীয় শ্রেণীর প্রতিভা বলে তুচ্ছ করা যুক্তিসম্মত কিনা বিচার্য। সম্ভবত, অ্যারিস্টটলের প্রতিভা এবং অ্যাকাডেমীতে তাঁর অধ্যক্ষপদ না পাওয়াতেই সমালোচকদের বিদ্রূপের পাত্র হয়েছেন তিনি বা অপর অধ্যক্ষরা। কিন্তু মনে রাখতে হবে, অ্যাকাডেমীর নিয়মানুসারে অ্যারিস্টটলের অধ্যক্ষ হওয়া সম্ভব ছিল না। যাই হোক, প্লেটোর প্রতি জেনোক্রেটিসের অগাধ শ্রদ্ধা ছিল, এবং গুরুর নিয়মাবলী অক্ষরে অক্ষরে মেনে চলতেন। তা ছাড়া, অ্যাকাডেমীতে তিনি প্লেটোর দর্শন পড়াতেন। তাঁর দার্শনিক চিন্তা-ভাবনায় পীথাগোরীয় প্রভাব দেখা যায়।

ইউডিমাস (Eudemus)

বিশ্ববন্দিত অ্যারিস্টটলের শিষ্য ছিলেন ইউডিমাস। লাইসিয়ামে বিভিন্ন বিভাগ বিভিন্ন বিশেষজ্ঞের তত্ত্বাবধানে ছিল। ইউডিমাস গণিত ও জ্যোতির্বিজ্ঞান বিভাগের ভার পেয়েছিলেন। দুর্ভাগ্যের বিষয়, ইউডিমাসের রচনাবলী অবলুপ্ত,—বিচ্ছিন্ন ও টুকরো টুকরো অংশমাত্র কালের গ্রাস এড়াতে পেরেছে। গণিতের ইতিহাসের লেখক হিসাবে তাঁর অধিক খ্যাতি। ফিলোলাউসের রচনার অংশ-বিশেষ ইউডিমাসের রচনা থেকে উদ্ধার করা সম্ভব হয়েছে। তাঁর রচনা থেকে জানতে পারা যায়, অ্যানাক্সিমেনেস মনে করতেন, চন্দ্রের নিজস্ব আলো বা দ্যুতি নেই; তার ঔজ্জ্বল্য সূর্যের আলোর প্রতিফলনের জন্য; আনুমানিক 320 খ্রীস্টপূর্বাব্দে তিনি গণিতের ইতিহাস রচনা করেন। তাঁর রচনা থেকেই মহামতি অ্যারিস্টটলের বহু রচনাংশ জানতে পারা যায়। আনুমানিক 335 খ্রীস্টপূর্বাব্দে তিনি বর্তমান ছিলেন, এবং সম্ভবত ইউক্লিডের পূর্বসূরী।

অ্যারিস্টাস (Aristaeus)

জ্যামিতির ইতিহাসে ইউক্লিড ও অ্যাপোলোনিয়াস স্মরণীয় দুইটি নাম। জ্যামিতিতে বিশ্লেষণ এঁদের রচনায় পরিদৃষ্ট হয়। আর যদি কোন গ্রীক জ্যামিতিকারের এই দুইজনের সঙ্গে উল্লেখ করতে হয়, তিনি নিঃসন্দেহে অ্যারিস্টাস। পাঁচ খণ্ডে তাঁর রচনা *Solid loci*, পঞ্চ সুষম ঘনবস্তু সম্পর্কেও তিনি লেখেন। তাঁর মৌলিকতার কথা বলতে হলে একজন প্রখ্যাত গণিতের ঐতিহাসিকের মন্তব্যের উল্লেখ করতে হয় ঃ…"**the 13th book of Euclid seems to have owed much to his skill. He…helped to make possible the works of Euclid and Apollonius**."[৬]

ক্যালিপাস (Calippus)

গণিতজ্ঞ বা জ্যামিতিকার হিসাবে ক্যালিপাসের তত খ্যাতি না থাকলেও, জ্যোতির্বিজ্ঞানী হিসাবে তার নাম ইউডকসাসের সঙ্গে স্মরণীয়। তাত্ত্বিক গবেষণা নয়, জ্যোতির্বৈজ্ঞানিক পর্যবেক্ষণও তিনি করেছিলেন। মেটনীয় চক্রের চেয়ে উন্নত আর এক ধরনের চক্র তিনি আবিষ্কার করেছিলেন। এই চক্র **76** বৎসর, 960 চান্দ্রমাস বা 27,759 দিন নিয়ে গঠিত। **এই চক্র ক্যালিপীয়-চক্র (Callippic Cycle)** নামে খ্যাত। ব্রহ্মাণ্ডের গ্রহ ও জ্যোতিষ্কদের গতি **27**টি স্ফটিক-গোলকের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায় বলে ইউডকসাস মনে করতেন। ক্যালিপাস গ্রহদের গতির জটিলতা মোচনে **34**টি স্ফটিক-গোলকের অবতারণা করেন।

ইরাটোস্থেনিস (Eratosthenes)

প্রাচীনকালের সর্বশ্রেষ্ঠ গণিতজ্ঞ আর্কিমিডিসের পরম সুহৃদ ছিলেন ইরাটোস্থেনিস। তিনি ছিলেন মিউজিয়ামের অধ্যক্ষ, জ্যোতির্বিদ ও ভূগোলবিদ। অসাধারণ পাণ্ডিত্য ও মননশীলতার অধিকারী হওয়ায় তঁাকে **দ্বিতীয় প্লেটো** বা **বিটা** (**Beta**) আখ্যা দেওয়া হয়। বস্তুত, আলেকজান্দ্রিয়া বিশ্ববিদ্যালয়ে তাঁর ঘরের নম্বর ছিল **2** অর্থাৎ β। গণিতে তাঁর বেশী অবদান নেই,—একমাত্র মৌলিক সংখ্যা নির্ণয়ের **চালুনি পদ্ধতি** ছাড়া, কিন্তু জ্যোতির্বিদ ও ভূগোলবিদ হিসাবে তাঁর খ্যাতি কম নয়। পৃথিবীর পরিধি ও ব্যাস নির্ণয়ের ক্ষেত্রে তাঁর গণনা প্রায় আধুনিক মানের সমান, ক্রান্তিবৃত্তের তির্যকতা তাঁর এক বিস্ময়কর আবিষ্কার। ঘনকের বর্গীকরণেও তিনি আকৃষ্ট ছিলেন বলে জানা যায়। 274 খ্রীস্টপূর্বাব্দে সাইরেনে জন্ম ও 194 খ্রীস্টপূর্বাব্দে তাঁর মৃত্যু হয়।

হিপসিকলস (Hypsicles)

প্রাচীনকাল থেকেই মিশর ও ব্যাবিলনের সঙ্গে গ্রীসের ঘনিষ্ঠ যোগাযোগ দেখা

---

৬. History of Mathematics (Vol-I)—D. E. Smith, Page—95

যায়। সুতরাং গ্রীস যে ওই দেশের গণিত ও জ্যোতির্বিজ্ঞানে সবিশেষ প্রভাবিত হবে, তাতে আশ্চর্যের কিছু নেই। বিভিন্ন সময় কখনো গণিত, কখনো জ্যোতির্বিজ্ঞান কোন কোন গণিতজ্ঞের ধ্যান-ধারণা গড়ে তুলতে সাহায্য করেছে। খ্রীস্টপূর্ব দ্বিতীয় শতাব্দীর হিপসিকলসের ওপর ব্যাবিলনীয় জ্যোতির্বিজ্ঞানের প্রভাব দেখা যায়। এই সময় থেকেই গ্রীসে বৃত্তকে 360 ভাগে ভাগ করার রীতি দেখা যায় ; তা ছাড়া ষষ্ঠিক ভগ্নাংশের প্রয়োগও দেখা যায়,—বিশেষ করে টলেমীর অ্যালমাজেস্ট গ্রন্থে এর ব্যবহার আছে।

আলেকজান্দ্রিয়ার এই গণিতজ্ঞ-জ্যোতির্বিদ ইউক্লিডের এলিমেণ্টস-এর চতুর্দশতম খণ্ডটি রচনা করেছিলেন বলে অনুমান করা হয়। এতে **সুষম বহুতলক সম্বন্ধে** সাতটি প্রতিজ্ঞা আছে। পীথাগোরীয়দের ন্যায় তিনি বহুভুজ সংখ্যায় আগ্রহী ছিলেন, প্রগতি ও কয়েক ধরনের অনির্ণেয় সমীকরণ নিয়ে অনুসন্ধান করেছিলেন।

অ্যারিস্টারকাস (Aristarchus)

আলেকজান্দ্রিয় যুগের প্রথম দিকে দুইটি জ্যোতির্বৈজ্ঞানিক ঘটনা যেমন আকর্ষণীয়, তেমনি গুরুত্বপূর্ণ। এই সময় পৃথিবী থেকে সূর্যের দূরত্ব নির্ণয় ও খ-গোলের পরিমাপ নির্ণয়ের প্রচেষ্টা চালানো হয়। প্রথমটির সঙ্গে সামোসের অ্যারিস্টারকাসের নাম জড়িত। হিপারকাস ও টলেমীর পূর্ববর্তী এই গণিতজ্ঞ-জ্যোতির্বিদ সর্বপ্রথম সূর্যকেন্দ্রিক ব্রহ্মাণ্ড পরিকল্পনা করেন। কিন্তু দুর্ভাগ্যের বিষয়, পরবর্তী জ্যোতির্বিজ্ঞানীরা তাঁর এই পরিকল্পনা গ্রাহ্য করেননি। তাঁর সূর্যের দূরত্ব নির্ণয়ের ফল শুদ্ধ নয়, কিন্তু তাতে কিছু এসে যায় না। এ-বিষয়ে তিনি যে পদ্ধতি ও পরিকল্পনা করেছিলেন, তা প্রশংসনীয় ও কৃতিত্বপূর্ণ। তিনি বলেন, পৃথিবী থেকে চন্দ্রের দূরত্বের **উনিশ গুণ হচ্ছে** পৃথিবী থেকে সূর্যের দূরত্ব।

অ্যারিস্টারকাসের জন্ম-মৃত্যুর সঠিক সন-তারিখ পাওয়া যায় না। কিন্তু তাঁর এক জ্যোতির্বৈজ্ঞানিক পর্যবেক্ষণ থেকে জানতে পারা যায় যে, তিনি 280 খ্রীস্টপূর্বাব্দে বর্তমান ছিলেন। তাঁর বিখ্যাত গ্রন্থটির নাম ***On the Magnitude and Distance of the Sun and Moon.*** সপ্তদশ শতাব্দীতে এই গ্রীক গ্রন্থটি সম্পাদনা করেন **Dr. Wallis.**

হিপারকাস (Hipparchus)

গ্রীক জ্যোতির্বিজ্ঞানের-চরম মুহূর্ত হিপারকাস ও টলেমীকে কেন্দ্র করে। হিপারকাসের জ্যোতির্বিজ্ঞান সম্বন্ধীয় গবেষণার পরিচয় টলেমীর অ্যালমাজেস্ট থেকে জানতে পারা যায়। এশিয়া মাইনরের অন্তর্গত বিথিনিয়ার (**Bithynia**) নিসিয়া-য় (**Nicaea**) তাঁর জন্ম। নির্দিষ্ট করে তাঁর জন্ম-সন উল্লেখ করা না

গেলেও 190-180 খ্রীস্টপূর্বাব্দে জন্মগ্রহণ করে থাকবেন,—এমন অনুমান করা যায়। রোডস দ্বীপে মানমন্দির নির্মাণ করে গবেষণায় আত্মনিয়োগ করেন, —প্রায় 30-35 বৎসর। গোলীয় ত্রিকোণমিতিতে তাঁর অবদান শ্রদ্ধার সঙ্গে স্মরণীয়। এই প্রসঙ্গে জ্যোতির্বিজ্ঞানের এক ঐতিহাসিক বলেন,—**"The invention of spherical trigonometry is supposed to be due to him, and undoubtedly the first application of it is, by which the places of the celestial bodies may be fixed, and the variations of their movements exhibited with precision."**[৭] ক্রান্তিবিন্দুর অয়ন-চলন তাঁর সর্বশ্রেষ্ঠ আবিষ্কার। 1080 নক্ষত্রের তালিকা প্রস্তুতি বিস্ময়কর, প্লিনির ভাষায় **a thing even hard for a god to perform—*"Ausus rem etiam Deo improbam"***[৮] কেবল গোলীয় ত্রিকোণমিতির স্রষ্টা হিসাবেই নয়, গণিতে বিশেষত ত্রিকোণমিতিতে তাঁর অবদান আছে। নিম্নের প্রতিজ্ঞাটি তাঁর অবদান বলে মনে করা হয়ঃ

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

সাইন-সারণী (**Table of sines**) প্রস্তুতি তাঁর আর এক অক্ষয় কীর্তি।

জেমিনাস (Geminus)

রোডস দ্বীপবাসী আর একজন গণিতজ্ঞ হচ্ছেন জেমিনাস। ইনি গণিতের ইতিহাসে বিশেষ আগ্রহী ছিলেন। তিনি গণিতকে বিশুদ্ধ ও ফলিত এই দুইভাগে ভাগ করেন। বিশুদ্ধ বিভাগের অন্তর্গত পাটীগণিত ও জ্যামিতি, আর ফলিত বিভাগের অন্তর্গত বলবিদ্যা, জ্যোতির্বিদ্যা, আলোকবিদ্যা, ভূ-বিদ্যা (**Geodesy**) এবং লগিস্টিক (**logistic**)। তিনি জ্যামিতি বিষয়ক একটি গ্রন্থের রচয়িতাও ছিলেন। তাঁর ***Phaenomena*** নামে জ্যোতির্বিজ্ঞানের গ্রন্থটি কালের গ্রাস এড়াতে পেরেছে। প্রোক্লাস তাঁর গ্রন্থ রচনার বহু উপাদান জেমিনাসের গ্রন্থ থেকে সংগ্রহ করেন। তাঁর গ্রন্থের ভাষা ও প্রকাশভঙ্গী সহজ, সরল ও ললিত বলে বিশেষজ্ঞরা মনে করেন। তাঁর জ্যোতির্বিজ্ঞান গ্রন্থে "রাশিচক্র, দ্বাদশ রাশির ক্রমিক স্থান, রাশিদের আকৃতি, অক্ষরেখা ও মেরু, খগোল, দিন ও রাত্রি, দ্বাদশ রাশির উদয়-কাল, মাস, চন্দ্রকলা, সূর্যগ্রহণ, চন্দ্রগ্রহণ, ব্রহ্মাণ্ডে বা কসমস-এর গতির বিপরীত দিকে গ্রহদের যে গতি দৃষ্ট হয় তাহার আলোচনা, স্থির নক্ষত্রের বৃত্ত, পৃথিবীমণ্ডল, নক্ষত্রের অবস্থানের সহিত আবহাওয়ার সম্বন্ধ, যুতিকাল ইত্যাদি" আছে।[৯]

---

৭. History of Astronomical Discoveries—T. Milner, Page—10

৮. Ibid, Page—11

৯. বিজ্ঞানের ইতিহাস (প্রথম খণ্ড)—সমরেন্দ্রনাথ সেন, পৃ—266—267

থিওডোসিয়াস (Theodosius)

খ্রীস্টীয় প্রথম শতাব্দীতে থিওডোসিয়াস ছিলেন একজন গণিতজ্ঞ ও জ্যোতির্বিদ। ফোনেশীয় উপকূলে ট্রিপলির বাসিন্দা বলে তাঁর পরিচয়। গণিতের নানা বিষয়ে তিনি লিখেছিলেন বটে, কিন্তু গোলক সম্বন্ধীয় লেখাটি শ্রেষ্ঠ বিবেচিত হয়। তাঁর এই গ্রন্থটি খুবই সহজ এবং আরবী ভাষায় অনূদিত হয়। পাঠ্যপুস্তকরূপে এটি স্বীকৃতি লাভ করে। ইনি রোডস দ্বীপের থিওডোসিয়াস নন।

থিওন (Theon of Smyrna)

গ্রীক গণিতের ইতিহাসে অন্তত দুইজন থিওনের নাম পাওয়া যায়। আগেই আমরা একজন থিওনের উল্লেখ করেছি। আমাদের আলোচ্য থিওন সেই থিওন নয়; ইনি স্মারনার থিওন বলে পরিচিত।
নিকোম্যাকাসের পর ইনি গ্রীক পাটীগণিতের ধারা বজায় রাখেন এবং জ্যোতির্বিজ্ঞানে আগ্রহী ছিলেন। তাঁর বিখ্যাত গ্রন্থটির নাম *Expositio*। প্লেটোর দর্শন উপলব্ধির জন্য গণিতের প্রয়োজন বোধে তিনি এই গ্রন্থটি রচনা করেন। ইনি খ্রীস্টীয় দ্বিতীয় শতাব্দীতে বর্তমান ছিলেন।

পরফিরি (Porphyry)

ইনি পরফিরিয়াস নামেও পরিচিত। খ্রীস্টীয় তৃতীয় শতাব্দীতে বর্তমান ছিলেন। সিসিলি, রোম ও এথেন্সে বসবাস করেন। খ্রীস্টধর্মের প্রতি তাঁর মনোভাব অনুকূল ছিল না। প্রধানত দার্শনিক হলেও পীথাগোরাসের জীবন ও টলেমীর সঙ্গীতের ওপর গ্রন্থ রচনা করেন।

আয়ামব্লিকাস (Iamblichus)

পরফিরির উল্লেখযোগ্য ছাত্র হচ্ছেন আয়ামব্লিকাস। ইনি **কোলেসিরিয়া**-র (Coelesyria) অন্তর্গত **চ্যালসিস** (Chalcis) নামক স্থানে আনুমানিক 283 খ্রীস্টাব্দে জন্মগ্রহণ করেন। নিকোম্যাকাসের পর যে-সব গ্রীক গণিতজ্ঞের ওপর জ্যামিতি অপেক্ষা পাটীগাণিতিক গবেষণার প্রতি বিশেষ প্রবণতা দেখা যায়, তাঁদের মধ্যে অবশ্যই আয়ামব্লিকাসের নাম করতে হয়। নিকোম্যাকাসের গ্রন্থের ওপর ভাষ্য রচনা তাঁর উল্লেখযোগ্য কাজ; তিনি নিজেও পাটীগণিতের ওপর গ্রন্থ রচনা করেন। সে-যুগে তাঁর একটি প্রতিপাদ্য বিশেষ জনপ্রিয়তা লাভ করতে পেরেছিল। তাঁর এই প্রতিপাদ্যটি মূল্যবান বলে বিবেচিত হয়: **একটি সংখ্যা যদি 3_n, 3_{n-1} ও 3_{n-2} এই সংখ্যাত্রয়ের সমষ্টির সমান হয়, এবং এদের অঙ্কগুলি যদি পৃথক পৃথকভাবে যোগ করা হয়, তা হলে সর্বশেষ সংখ্যাটি 6 হবে।**

এই প্রতিপাদ্যটির উপস্থাপনায় আয়ামব্লিকাসের কৃতিত্ব স্মরণীয় এইজন্য যে,

গ্রীকরা সংখ্যার সাহায্যে অঙ্ক প্রকাশ না করে বর্ণমালার সাহায্য নিত। বস্তুত একটি অপরিচিত পদ্ধতির সাহায্যে সংখ্যা প্রকাশ করে আয়ামব্লিকাস গ্রীক গণিতের একটি দিক খুলে দিয়েছিলেন। কিন্তু দুর্ভাগ্যের বিষয়, সভ্যতা ও সংস্কৃতির জগতে গ্রীকদের প্রভাব-প্রতিপত্তি রাজনৈতিক ও ধর্মীয় কারণে ক্ষয়িষ্ণু হওয়ায় সংখ্যা-তত্ত্বের আর উন্নতি দেখা গেল না।

একটি বিশাল ইমারৎ নির্মাণে বহুজনের প্রয়োজন। বাস্তুকার, স্থপতি থেকে কুলি-মজুর পর্যন্ত। সবারই কিছু না কিছু অবদান থাকে,—কেউ বুদ্ধি দিয়ে, কেউ পরিকল্পনা দিয়ে, আবার কেউ বা দৈহিক শ্রম দিয়ে কাজের সম্পূর্ণতা সাধনে সহায়তা করেন। সভ্যতা ও সংস্কৃতির ইতিহাসেও ঠিক এমনটি দেখা যায়। অসামান্য প্রতিভাধরদের আগমনে সভ্যতা নব নব রূপ পায়, পরিপুষ্টি লাভ করে সত্য, কিন্তু তার রক্ষণাবেক্ষণ, প্রচার-প্রসারে অপেক্ষাকৃত কম প্রতিভাধরদের অবদানও তুচ্ছ করার নয়। গ্রীক গণিতের ইতিহাসে তেমন বহুজনের অবদান আছে, সবার নাম শ্রদ্ধার সঙ্গে স্মরণীয় হলেও, আমাদের এই গ্রন্থে সবার কৃতিত্বের উল্লেখ সম্ভব নয়। বস্তুত, এই গ্রন্থে আমরা গ্রীক গণিতের অতি সংক্ষিপ্ত একটি রূপরেখা তুলে ধরার প্রয়াস পেয়েছি। তাই, স্বাভাবিকভাবেই প্রধান প্রধান গণিতজ্ঞদের অবদান বিষয়ে সংক্ষিপ্ত আলোচনা করেছি; আর দু-একজন দার্শনিকের দৃষ্টিভঙ্গির কথা তুলে ধরেছি যাঁদের ধ্যান-ধারণা গণিত ও বিজ্ঞানে অসামান্য প্রভাব বিস্তার করেছিল। কেবল সেই গ্রীকযুগেই যে তাঁদের শ্রদ্ধার আসন ছিল, তা নয়; তাঁরা দীর্ঘদিন ধরে মানব সভ্যতার প্রেরণা ও চিন্তা-ভাবনা যুগিয়ে এসেছেন। আমরা প্লেটো-অ্যারিস্টটলের কথাই বলেছি।

গ্রীক গণিতের অসাধারণ সাফল্য, বিশেষত গ্রীকদের বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিভঙ্গী থাকা সত্ত্বেও কিভাবে এবং কেন এই সভ্যতার পতন হলো, তার কারণ অনুসন্ধান ইতিহাসের বিষয়বস্তু হলেও সাধারণভাবে গণিত ও বিজ্ঞানের ইতিহাসে এ-নিয়ে সামান্য আলোচনার প্রয়োজন আছে বলে মনে হয়। তাই আমরা গ্রন্থের শেষ পর্যায়ে এই নিয়ে সংক্ষেপে কিছু আলোচনা করব। মনে হয়, এতে গণিতের সঙ্গে সমাজ, রাজনীতি, অর্থনীতি ইত্যাদি বিষয়গুলির সম্পর্ক কিছুটা স্পষ্ট হবে। কারণ, গণিত বিচ্ছিন্ন কোন বিষয় নয়। দেশ কাল সময় ইত্যাদির পরিপ্রেক্ষিতে এর সত্তা উপলব্ধি করতে হবে। তবেই এর গতিময়তা ও প্রাণশক্তির অনিবার্যতা সম্বন্ধে প্রত্যয়-প্রতীতি দৃঢ় হবে। প্রসঙ্গক্রমে বলা যায় যে, গ্রীক গণিতজ্ঞদের মধ্যে তত্ত্ব ও প্রয়োগের মধ্যে অসামঞ্জস্যতাই গ্রীক গণিতের পতনের অন্যতম একটি কারণ। "যে চিন্তার সঙ্গে প্রয়োগের কোন সম্পর্ক নেই সেই চিন্তা বাস্তব কি অবাস্তব তা নিয়ে যে বিবাদ তা স্কলাস্টিক মতবাদীদের প্রশ্ন ছাড়া অন্য কিছু নয়।"[১০] গ্রীক দার্শনিক ও গণিতজ্ঞদের মধ্যে ক্রমশ এটাই স্পষ্ট হয়ে দেখা দিয়েছিল।

---

১০. "বিজ্ঞান ও মার্কসীয় দর্শন" ,জে. বি. এস. হলডেন, পৃ—৯

সপ্তদশ অধ্যায়

গ্রীক গণিতে সঙ্কেত ও প্রাথমিক চার নিয়ম

"Very striking was the difference in the bent of mind of the Hindoo and Greek; for, while the Greek mind was pre-eminently *Geometrical*, the Indian was first of all *arithmetical*. The Hindoo dealt with number, the Greek with form." F. Cajori

ক্লাসিক্যাল গ্রীকযুগে বিমূর্ত চিন্তনের প্রতি অধিকতর গুরুত্ব আরোপ করা হতো। পীথাগোরাসের সময় থেকে এই প্রবণতা দেখা গেলেও প্রথমত প্লেটো এবং তারপর অ্যারিস্টটল বিমূর্ত চিন্তনের প্রতি গুরুত্ব আরোপ করেছেন। গণিতের বিকাশ ও সমৃদ্ধিতে এই দুই মহান দার্শনিকের বিস্ময়কর প্রভাব ও প্রতিপত্তির জন্য গ্রীক গণিত এ-যুগে কখনোই ব্যবহারিক গণিত হয়ে উঠতে পারেনি। ফলে, জ্যামিতি অপ্রতিহত গতিতে এগিয়ে গেছে সত্য, কিন্তু পাটীগণিত ও বীজগণিতের প্রকৃত আবির্ভাব ঘটতে অনেক বিলম্ব হয়েছে। গণনা করার কৌশল এ-যুগে পাটীগণিত বলে স্বীকৃত হয়নি, **লগিস্টিকা** (**logistica**) বলে স্বীকৃত হয়েছে। পাটীগণিত বা **arithmetica** বলতে সংখ্যাতত্ত্বের কথা বোঝানো হতো।

প্রাচীন গ্রীক সংখ্যার নিদর্শন ক্রীট দ্বীপে পাওয়া যায়। ক্রীট-সভ্যতা প্রায় খ্রীস্টপূর্ব একাদশ-দ্বাদশ শতাব্দীতে বর্তমান ছিল। এই প্রাচীন সংখ্যার যে তেমন কিছু বিশেষত্ব বা বৈশিষ্ট আছে, তা নয়। এই সংখ্যা পরিকল্পনায় বিশেষ বিশেষ সংখ্যার জন্য বিশেষ বিশেষ প্রতীক বা সঙ্কেত দেখা যায়। যেমন— **1, 2, 3, 4, 100, 200, 1000** ইত্যাদির জন্য পৃথক পৃথক প্রতীক ছিল। ক্লাসিক্যাল যুগের প্রথম দিকে গ্রীকরা সংখ্যার জন্য আরো বিশেষ বিশেষ প্রতীক প্রবর্তন করে, এবং **অ্যাবাকাস**-এর(**abacus**) সাহায্যে গণনা শুরু করে। প্রায় 500 খ্রীস্টপূর্বাব্দে তারা **অ্যাটিক পদ্ধতি** (**attic**) ব্যবহার করতে থাকে; খ্রীস্টপূর্ব 450 থেকে প্রাচীন শিলালিপিতে এর নিদর্শন পাওয়া গেছে। অ্যাটিক পদ্ধতিতে খরোষ্ঠী ও ব্রাহ্মী সংখ্যার মত উল্লম্ব রেখার সাহায্যে 1 থেকে 4 পর্যন্ত সংখ্যা লেখার নমুনা দেখা যায়। আর **পেন্টা-র** (**penta**) প্রথম বর্ণ এবং পরবর্তীকালে 5-সংখ্যা প্রতীক ছিল **Γ**।

সপ্তজ্ঞানীর অন্যতম থ্যালেস ও পীথাগোরীয়রা কিভাবে সংখ্যা লিখতেন, তার কোন ইঙ্গিত পাওয়া যায় না। তবে পীথাগোরীয়রা নুড়ির সাহায্যে নানা

ধরনের সংখ্যা গঠন করত। মনে হয়, গণনাতেও তারা নুড়ি ব্যবহার করে থাকবে। কারণ, **calculus** শব্দের অর্থ **pebbles**, প্রাচীন ভারতে গণনা যেমন **ধূলিকর্ম** হিসাবে গণ্য হতো, প্রাচীন গ্রীসেও অনুরূপ গণনা দেখা যায়। বস্তুত, **abacus**-এর মূলগত অর্থ **saud**, সুতরাং এরূপ মনে করা অসঙ্গত হবেনা যে, প্রাচীন গ্রীসে বালির ওপর **ডট (dot)** অঙ্কিত করে গণনা করা হতো। আদি গণিতজ্ঞ থ্যালেস থেকে ইউক্লিড পর্যন্ত পায় 300 বছরের ব্যবধান। কিন্তু এই দীর্ঘ সময়ে গ্রীক গণনা পদ্ধতির উন্নতি হয়নি বললেই চলে। এর কারণ আগেই উল্লেখ করা হয়েছে।

সংখ্যা-লিখন পদ্ধতির আমূল পরিবর্তন আয়োনীয় ও আলেকজান্দ্রিয় যুগে দেখতে পাওয়া যায়। কিন্তু কিভাবে এই পরিবর্তন সাধিত হলো, তার ক্রমবিকাশ ও ঐতিহাসিক কারণ গণিতের ঐতিহাসিকরা খুঁজে পাননি। তাই তাঁরা বলেছেন, অজ্ঞাত কারণে এই পরিবর্তন হয়েছিল। যাই হোক, পরিবর্তিত রূপটি নিয়ে সামান্য আলোচনা করা যাক।

এই পদ্ধতিতে বর্ণমালার প্রত্যেকটি বর্ণ সংখ্যার প্রতীকরূপে প্রকাশিত হতে থাকল। আলেকজান্দ্রিয় যুগে এর ব্যাপক ব্যবহার দেখা যায়; টলেমী **অ্যালমাজেস্ট** গ্রন্থে এই পদ্ধতি অনুসরণ করেছেন। এমন কি, প্রাচীন সিরিয়া, ইস্রায়েলেও এই পদ্ধতি দেখতে পাওয়া যায়। নিম্নে গ্রীক বর্ণ ও সংখ্যাগুলি দেখানো হলো ঃ

α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η
1	2	3	4	5	6	7	8
θ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο
9	10	20	30	40	50	60	70
π	ϙ	ρ	σ	τ	φ	χ	ψ
80	90	100	200	300	500	600	700
ω	ϡ	͵α	͵β	͵γ	M	$\overset{\beta}{M}$	$\overset{\gamma}{M}$
800	900	1000	2000	3000	10,000	20,000	30,000

চিত্র—30

বিভিন্ন বর্ণের সঠিক সমাহার ঘটিয়ে মধ্যবর্তী সংখ্যা নিষ্পন্ন হতো। যেমন,— $\iota\alpha=11$, $\iota\beta=12$, $\kappa\alpha=21$, $\rho\nu\gamma=153$ ইত্যাদি। এইসব সংখ্যা গঠনে যোগের ধারণা অনুসৃত হয়েছে। উদাহরণস্বরূপ, $\kappa\alpha=21=20+1$, $\rho\nu\gamma=153=100+50+3$; **6, 90 900**—এর প্রতীক তখনকার প্রচলিত গ্রীক বর্ণমালায় ছিলনা। এগুলি **ফোনেশীয় লিপি** থেকে গ্রীকরা গ্রহণ করেছে; বর্তমানে এদের **স্টিগমা** বা দিগম্মা, **কোপ্পা** এবং **সাম্পি** বলা হয়। আর একটি প্রতীক

M তারা অ্যাটিক থেকে গ্রহণ করেছে। গণিতের ঐতিহাসিকরা অনুমান করেন, এই সংখ্যা লিখন পদ্ধতি গ্রীকরা এশিয়া মাইনরের মিলেটাস থেকে গ্রহণ করেছে।

এক হাজারের ওপরের সংখ্যা বোঝানোর জন্যও বর্ণ ব্যবহৃত হতো, কিন্তু তার আগে একটি উল্টো ধরনের **হসন্ত-চিহ্ন** বসিয়ে শব্দ ও সংখ্যায় যাতে ভ্রান্তি বা গোলযোগ না ঘটে তার ব্যবস্থা করা হতো, আর ঠিক একই কারণে সংখ্যার ওপর একটি **অনুভূমিক রেখা** দেওয়া হতো। একটি উদাহরণ ঃ

$$\overline{{}_{/}\alpha\tau\epsilon}=1305$$

এখানে, $_{/}\alpha=1000, \tau=300. \epsilon=5$

প্রাচীন ভারতীয় ও গ্রীক পদ্ধতিতে যোগের ক্ষেত্রে সাদৃশ্য দেখতে পাওয়া যায়। এমন কি, বর্তমানে আমরা যেভাবে যোগ করি, গ্রীকরা অন্তত খ্রীস্টপূর্ব তৃতীয় শতাব্দীতে এমনটি করত। তারা যোগের সংখ্যাগুলি পরপর নীচে লিখত,—এককের ঘরে এককের সংখ্যা, দশকের ঘরে দশকের সংখ্যা ইত্যাদি এমনি করে। আলেকজান্দ্রিয়া বিশ্ববিদ্যালয়ে মিশরীয় পদ্ধতিও শেখানো হতো, কিন্তু তা ছিল গ্রীক পদ্ধতি থেকে ভিন্নতর। সম্ভবত, গ্রীকরা তখনো মিশরীয়-ব্যাবিলনীয় প্রভাব সম্পূর্ণ কাটিয়ে উঠতে পারেনি।

ভগ্নাংশের আলোচনায় দেখা যায়, $\frac{1}{2}$-এর জন্য বিশেষ প্রতীক ব্যবহৃত হতো। যেমন,—

$$\frac{1}{2}=L'' ; \quad 1\frac{1}{2}=\alpha L'' ; \quad 2\frac{1}{2}=\beta L'' ; \quad 3\frac{1}{2}=\gamma L''$$ ইত্যাদি।

ছোট ছোট ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে লব বোঝানোর জন্য একটি **ড্যাস**, আর হর বোঝানোর জন্য একই সংখ্যা দুইটি **ড্যাস** সহ একবার অথবা দুবার ব্যবহার করা হতো। যেমন,—

$$\iota\gamma'\,\kappa\theta''\,\kappa\theta''=\frac{13}{29}$$

ডায়োফ্যান্টাসের গ্রন্থে হর লবের ওপরে লেখা হয়েছে। মিশরীয় গণিতে লব 1-এর চেয়ে বেশী হলে, তা একক-ভগ্নাংশের আকারে প্রকাশ করা হয়েছে। গ্রীক গণিতেও এইরকম দেখতে পাওয়া যায়। বলা বাহুল্য, এখানে মিশরীয় প্রভাব বিশেষভাবে দৃষ্ট হয়। প্রখ্যাত গ্রীক গণিতজ্ঞ হীরন $\frac{163}{224}$ ভগ্নাংশটি এইভাবে প্রকাশ করেছেন ঃ

$$\frac{163}{224}=\frac{1}{2}\;\frac{1}{7}\;\frac{1}{14}\;\frac{1}{112}\;\frac{1}{224}$$

আবার, অন্যভাবেও তিনি এই ভগ্নাংশটি প্রকাশ করেছেন :

$$\frac{163}{224}=\frac{1}{2}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{32}\ \frac{1}{112}$$

টলেমীর গ্রন্থে মিশরীয় প্রভাব থাকা তেমন বিচিত্র নয়। কিন্তু $\frac{23}{25}$-কে নিম্নরূপে প্রকাশ করেছেন :

$$\frac{23}{25}=\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{50}$$

ওপরের একক-ভগ্নাংশগুলিতে একটি জিনিস বিশেষভাবে লক্ষণীয় যে, এখানে **যোগচিহ্ন** (+) ব্যবহৃত হয়নি। গ্রীকরা সংখ্যা-লিখনে বর্ণ ব্যবহার করত বলে সম্ভবত চিহ্নের প্রয়োজন তেমন অত্যাবশ্যকীয় বলে অনুভূত হয়নি।

তখনকার মিশর ও গ্রীসে প্রচলিত সাধারণ ভগ্নাংশ যে জটিল, তাতে সন্দেহ নেই। এইরূপ ভগ্নাংশ জ্যোতির্বৈজ্ঞানিক গণনার সম্পূর্ণ অনুপযোগী ছিল। গ্রীকজাতির অনুসন্ধানের অবিরাম প্রয়াস থাকা সত্ত্বেও তারা ব্যাবিলনীয় পদ্ধতি গ্রহণ করেছিল। কিন্তু কবে তারা এই পদ্ধতি গ্রহণ করে, তা নির্ণয় করা কঠিন। টলেমীর বিশ্ববিশ্রুত গ্রন্থ **অ্যালমাজেস্ট**-এ ব্যাবিলনীয় পদ্ধতির প্রয়োগ দেখা যায়। উদাহরণস্বরূপ, টলেমী 31 25 দ্বারা নিম্নরূপ ভগ্নাংশ বোঝাতে চেয়েছেন :

$$31\quad 25=\frac{31}{60}+\frac{25}{60^2}$$

এই পদ্ধতি ব্যবহারের কারণ হিসেবে তিনি বলেছেন, প্রচলিত সামান্য ভগ্নাংশ ব্যবহারের অসুবিধা ও জটিলতার জন্য তিনি এরূপে করেছেন।

আলেকজান্দ্রিয় যুগে ভগ্নাংশ সংখ্যা হিসাবে পরিগণিত হতো বলে মনে হয়। কিন্তু ক্লাসিক্যাল যুগে ভগ্নাংশ সংখ্যা হিসাবে পরিগণিত হয়নি। তখন ভগ্নাংশ **পূর্ণসংখ্যার অনুপাত** বলে গণ্য হতো; সমানুপাত গণ্য হতো না, অনুপাত স্বীকৃতি পেয়েছিল। অবশ্য গণিতজ্ঞরা ভগ্নাংশ উপেক্ষা করলেও ব্যবসা-বাণিজ্যে এর ব্যবহার ছিল। আলেকজান্দ্রিয় যুগে আর্কিমিডিস, হীরন, ডায়োফ্যান্টাস প্রমুখ গণিতজ্ঞরা ভগ্নাংশের ব্যবহার করেছেন, আর তার প্রক্রিয়াও দেখিয়েছেন। কিন্তু এই বরেণ্য গণিতজ্ঞরা ভগ্নাংশের প্রাথমিক ধারণা সম্পর্কে কোন ব্যাখ্যা-বিশ্লেষণ দেননি। খুব সম্ভব, তখন এর বহুল প্রচলন ছিল বলে, এ বিষয়ে বাহুল্য বোধ করেছেন। ঠিক যেমন, আর্যভট, ব্রহ্মগুপ্ত প্রমুখ গণিতজ্ঞরা অনেক গাণিতিক ধারণার সংজ্ঞা ও প্রক্রিয়া সম্পর্কে কিছু বলেননি।

ক্লাসিক্যাল যুগের প্রথম পর্ব থেকেই অমূলদ রাশি নিয়ে গ্রীক গণিতজ্ঞদের চিন্তা-ভাবনা ছিল। অন্তত পীথাগোরাসের সময় থেকে এর পরিচয় পাওয়া যায়।

প্লেটোর লেখা থেকে জানতে পারা যায়, পীথাগোরাস নাকি $\sqrt{2}$-এর আসন্ন মান নির্ণয় করেছিলেন। $\frac{49}{25}$-এর স্থূল মান 2 ধরে পীথাগোরাস $\sqrt{2}=\frac{7}{5}$ বলেছিলেন। এমনিভাবে থিওডোরাস $\frac{49}{16}$-কে 3 ধরে $\sqrt{3}=\frac{7}{4}$ বলেছিলেন। কিন্তু অমূলদ রাশি সম্পর্কে গ্রীক গণিতজ্ঞদের অনীহা ছিল, এবং সামগ্রিকভাবে তা গ্রীক গণিতের অপূরণীয় ক্ষতি করেছিল। থিওডোরাস $\sqrt{3}$-এর আসন্ন মান নির্ণয়ে সফল হননি বটে, কিন্তু এ-বিষয়ে সর্বকালের অন্যতম শ্রেষ্ঠ গণিতজ্ঞ আর্কিমিডিস অসামান্য পারদর্শিতা দেখিয়েছেন। আর এই প্রসঙ্গে তিনি যে বড় বড় সংখ্যা ও ভগ্নাংশিক প্রক্রিয়ার প্রয়োগ করে π-এর মান নির্ণয় করেছেন, তা নিঃসন্দেহে গণিতের ইতিহাসে একটি উল্লেখযোগ্য ঘটনা। যাই হোক, তাঁর $\sqrt{3}$-এর আসন্ন মান নিম্নরূপ ঃ

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$

প্রাচীনকালের সব দেশের গণিতজ্ঞদের একটি বৈশিষ্ট্য এই যে, তাঁরা সমস্যা সমাধানে যে গাণিতিক পদ্ধতি অবলম্বন করেন, তার ব্যাখ্যা-বিশ্লেষণ দেন না, কেবল ফলটি দিয়ে দেন। প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিহাসে শুল্বযুগে $\sqrt{2}$ এর আসন্ন মান নির্ণীত হয়েছে, কিন্তু সে ক্ষেত্রেও কোন পদ্ধতি দেখতে পাওয়া যায় না। আর্কিমিডিসও $\sqrt{3}$-এর আসন্ন মান কিভাবে পেলেন, তার বর্ণনা বা ব্যাখ্যা দেননি। গণিতের ঐতিহাসিকরা অনুমাননির্ভর নানা পদ্ধতির কথা বলেছেন। এখানে একটি পদ্ধতির উল্লেখ করা হলো ঃ

ধরা যাক, **A** প্রদত্ত সংখ্যা। এখন **A**-কে যদি $a^2 \pm b$ আকারে লেখা যায় যাতে a^2 প্রদত্ত সংখ্যার নিকটতম বড় বা ছোট মূলদ বর্গ-সংখ্যা হয় এবং **b** যদি ভাগশেষ হয়, তা হলে,—

$$a+\frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}$$

আর্কিমিডিস π-এর মান নির্ণয় করতে গিয়ে প্রথমে প্রমাণ করেছেন, সমকোণী ত্রিভুজের ভূমি যদি কোন বৃত্তের পরিধির সমান হয়, উচ্চতা ব্যাসার্ধের সমান হয়, তা হলে ওই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমান। এটি প্রমাণ করতে গিয়ে তিনি বৃত্তের পরিলিখিত ও অন্তর্লিখিত বহুভুজ অঙ্কন করে বহুভুজের পরিসীমা নির্ণয় করেছেন। অর্থাৎ নিঃশেষীকরণ পদ্ধতি প্রয়োগ করে π-এর নিম্নরূপ আসন্ন মান নির্ণয় করেছেন ঃ

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

অ্যাপোলোনিয়াস *The Rapid delivery* নামক গ্রন্থে π-এর আরো সূক্ষ্মতর মান নির্ণয় করেন বলে জানা যায়।

হীরন বর্গমূল নির্ণয়ে নিম্নরূপ সূত্র ব্যবহার করেন ঃ

$$\sqrt{A}=\sqrt{a^2 \pm b} \sim a \pm \frac{b}{2a}$$

পরবর্তীকালের গণিতজ্ঞরা $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ এই সূত্রের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় করেন। টলেমী $\sqrt{3}$-এর নিম্নরূপ আসন্ন মান নির্ণয় করেছেন ঃ

$$\sqrt{3}=\frac{103}{60}(+)\frac{55}{60^2}(+)\frac{23}{60^3}=1{\cdot}7320509$$

এখানে $\sqrt{3}$-এর মান ছয় দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ,—এটাই বিশেষভাবে লক্ষণীয়।

এতক্ষণ আমরা গ্রীক গণিতের সঙ্কেত ও কয়েকটি প্রাথমিক গাণিতিক ধারণা ও পদ্ধতি নিয়ে অতি সংক্ষেপে আলোচনা করলাম। বলা বাহুল্য,—গ্রীক গণিতের বিপুল ঐশ্বর্যের এটুকু ভগ্নাংশ মাত্র।

অষ্টাদশ অধ্যায়

গ্রীক গণিতের উত্থান-পতনের কারণ

> **Men at some time are masters of their fate :**
> **The fault, dear Brutus, is not in our stars,**
> **But in ourselves, that we are underlings.**
>
> Shakespeare.

গাণিতিক কাঠামোর উদ্ভব ও বিকাশ

চর্মচক্ষুতে প্রাকৃতিক ঘটনাবলীর মধ্যে রহস্যময়তা, বিশৃঙ্খলা, পারম্পর্যহীন নিয়ম ও খেয়াল-খুশীর ভাব দেখতে পাওয়া যায়। বিশ্বপ্রকৃতি যে নিয়মের অধীন, তার কাঠামো ও নিয়ম-সূত্রাদি সব যে প্রকৃতির মধ্যেই নিহিত আছে,—এই ধারণা, বিশ্বাস ও প্রত্যয়লাভ খুবই কঠিন। প্রাকৃতিক ঘটনাবলীতে গাণিতিক নিয়ম আবিষ্কার বা আরোপ গ্রীকদের সর্বশ্রেষ্ঠ কৃতিত্ব।

এই দুরূহ প্রত্যয়লাভে যাঁরা প্রথম অগ্রণী ভূমিকা নিয়েছিলেন, তাঁরা **পীথাগোরীয় সম্প্রদায়**। তাঁদের ধর্মচেতনার মূলে রহস্যময়তা ছিল, মরমী ভাব ছিল সত্য, আর গ্রীক ধর্ম থেকেই তাঁদের বিশ্বাস উৎপন্ন হয়েছিল সন্দেহ নেই, আবার ভারতীয় দর্শনের প্রভাব পড়াও অসম্ভব নয়, কিন্তু বিজ্ঞান, দর্শন ও গণিতে তাঁদের দৃষ্টিভঙ্গী ছিল সম্পূর্ণ নৈয়ায়িক, যুক্তি-তর্কের নিরিখে স্বীকৃত। গুণগত দিক থেকে বিচার-বিশ্লেষণ করলে যে-সব ঘটনার মধ্যে অনৈক্য, অসামঞ্জস্য পরিলক্ষিত হয়, সেইসব ঘটনা আবার গাণিতিক ধর্মে ব্যাখ্যাও হতে পারে। সুতরাং আপাত বিশৃঙ্খল প্রাকৃতিক ঘটনার নির্যাস (**essence**) গাণিতিক ধর্মে বর্তমান বলে তাঁদের মনে হয়েছিল। পীথাগোরীয়দের কাছে তাই **সংখ্যা-ই** সব কিছুর মূলে,—সংখ্যাসমূহের পারস্পরিক সম্পর্ক তাঁদের কাছে বড় হয়ে দেখা দিয়েছিল। প্রকৃতির ব্যাখ্যায় সে-কারণে তাঁরা সংখ্যা প্রয়োগ করেছিলেন। সংখ্যা নিয়ে বাড়াবাড়ি, অতিরঞ্জন তাঁদের পরিমিত জ্ঞানের অভাব বলে মনে করা হলেও, প্রাকৃতিক দর্শনের দিগ্‌দর্শনে তাঁদের এই ধারণা, ভাব গ্রীক গণিতের উদ্ভব পর্বে শুভ সূচনা করেছিল বলে মনে করা যেতে পারে। বিখ্যাত পীথাগোরীয় **ফিলোলাউস** বলেছেন,—"**Were it not for number and its nature, nothing that exists would be clear to anybody either in itself or in its relation to other things……you can observe the power of number exercising itself not only in the affairs of demons and gods but**

in all the acts and the thoughts of men, in all handicrafts and music.”

পীথাগোরীয় সম্প্রদায়ের পর যে-সব দার্শনিকের আবির্ভাব দেখা যায়, তাঁরা মূলত গাণিতিক চিন্তনের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত ছিলেন না সত্য, কিন্তু প্রাকৃতিক সত্তার সুস্পষ্ট রূপ উদ্‌ঘাটনে অবদান রেখে গেছেন। **পারমেনাইডিস, জেনো, এম্পিডোকলস,** (**Empidocles**), **লিউসিপাস, ডিমোক্রিটাস** প্রমুখ দার্শনিকদের যুক্তি ও দৃষ্টিভঙ্গী প্রাকৃতিক সত্তা অন্বেষণে প্রভূত সাহায্য করেছে। তাঁদের মূলকথা ঃ সত্তা বোধগম্য এবং চিন্তনের সাহায্যে তা উপলব্ধি বা আয়ত্ত করা সম্ভব। এই যে চিন্তাধারা, এই যে মানসিকতা ও দৃষ্টিভঙ্গী এতে গাণিতিক গবেষণায় প্রেষণা ও প্রেরণা সঞ্চারিত হয়েছে। লিউসিপাস ও ডিমোক্রিটাস আণবিক তত্ত্বের (**atomism**) উদ্‌গাতা হিসাবে লক্ষণীয়। তাঁদের দর্শনে দেখা যায়, বিশ্ব অসংখ্য চিরন্তন পরমাণু দ্বারা গঠিত। এই পরমাণুদের আকার, আয়তন, ক্রম এবং অবস্থানে পার্থক্য আছে, কিন্তু প্রত্যেক বস্তুই এদের সমন্বয়ে গঠিত। অবশ্য তাঁদের মতে পরমাণু অবিভাজ্য। **কাঠিন্য, আকার** ও **আয়তন** হচ্ছে পরমাণুর ভৌত ধর্ম, অন্য সব ধর্ম, যেমন, **স্বাদ, তাপ, বর্ণ** পরমাণুতে নেই,—তা আছে দর্শকের। সেইজন্য ইন্দ্রিয়জ্ঞান অসত্য,—দর্শকে দর্শকে তার তারতম্য। পীথাগোরীয়দের মত এঁদের অভিমত, অবিরত পরিবর্তনশীল ভৌত বিশ্বের সত্তা একমাত্র গণিতের মাধ্যমেই প্রকাশ করা সম্ভব অর্থাৎ বিশ্বের যাবতীয় ঘটনাবলী গাণিতিক সূত্রে প্রকাশযোগ্য।

পীথাগোরীয়দের পর গ্রীক মানসে যাঁর অপ্রতিহত প্রভাব ও প্রতিপত্তি দেখা যায়, তিনি প্লেটো। প্লেটো আক্ষরিক অর্থে গণিতজ্ঞ নন, গণিতে তাঁর মৌলিক গবেষণা ও আবিষ্কার নেই। কিন্তু গণিতের পঠন-পাঠন ও গবেষণায় তাঁর অসামান্য অবদান শ্রদ্ধার সঙ্গে স্মরণীয়। গণিতের মাধ্যমে যে সত্তা ও ভৌত প্রকৃতির বোধগম্যতা সম্ভব,—এই মতবাদ প্রচার করে তিনি পূর্বসূরী গণিতজ্ঞ ও দার্শনিকদের গবেষণার ধারক ও বাহক। **‘God eternally geometrizes’**—এর মাধ্যমে তাঁর বিশ্বপ্রকৃতির গাণিতিক কাঠামো মতবাদের প্রতিফলন দেখতে পাওয়া যায়। তাঁর মতে ইন্দ্রিয় জ্ঞান তুচ্ছ। কারণ, বস্তুসমূহ পরিবর্তিত হয়, ধ্বংস হয়। সেইজন্য প্রকৃতির প্রত্যক্ষ জ্ঞান এবং নিছক ইন্দ্রিয় অনুসন্ধান অর্থহীন। ভৌত জগৎ অসম্পূর্ণ, আদর্শ জগতের সত্যানুসন্ধানই দার্শনিক ও গণিতজ্ঞদের অনুশীলনের বিষয়বস্তু। গাণিতিক সূত্র চিরন্তন, অপরিবর্তনীয় এবং তা হচ্ছে সত্তার সার কথা, নির্যাস।

প্লেটোর চিন্তাধারা যে পীথাগোরীয়দের চেয়ে অনেক বেশী অগ্রসর, তাতে বিস্ময়ের নেই। তিনি কেবল গাণিতিক কাঠামোর মাধ্যেমেই প্রাকৃতিক সত্তার উপলব্ধি সম্ভব বলে মনে করেননি, প্রাকৃতিক সত্তাকে প্রতিস্থাপিত করেছেন গাণিতিক সত্তা দ্বারা। এ-বিষয়ে জ্যোতির্বিজ্ঞান সম্বন্ধে তাঁর অভিমত প্রণিধান-

যোগ্য। তিনি বলেন, এই বিজ্ঞানে কেবল দৃষ্টিগোচর মহাকাশের বস্তুসমূহের গতিই বিবেচনা করা হয় না ; মহাকাশে তারকা ও তাদের আপাত গতি সুন্দর ও নয়নাভিরাম হতে পারে ; কিন্তু কেবল গতি পর্যবেক্ষণ ও ব্যাখ্যা দ্বারা প্রকৃত সত্য লাভ করা যায় না। বস্তুত, প্লেটো এখানে তত্ত্বীয় জ্যোতির্বিজ্ঞান চর্চার প্রতি আগ্রহ প্রকাশ করেছেন। এখানে চোখের পরিতৃপ্তি হয় না, হয় মনের ; এখানে বস্তুকে বুঝতে হয় মনের দ্বারা ; স্থূল ইন্দ্রিয়ের দ্বারা নয়।

জ্যোতির্বিজ্ঞানে গণিতের ভূমিকা সম্পর্কে প্লেটোর অভিমত তাঁর দার্শনিক ভাবনায় সম্পৃক্ত। তাঁর মতে সর্বজনীন সত্তা **আকার** ও **ভাব** (idea) দ্বারা গঠিত। এই সত্তা মনুষ্যনিরপেক্ষ, চিরন্তন ও কালাতীত। স্মরণ দ্বারা আমরা এই ভাব সম্পর্কে সচেতন হই। যদিও এই ভাব আত্মায় নিহিত, তবুও গভীর থেকে তাদের স্মরণ করতে হয়, জাগরণ ঘটাতে হয়। এই ভাবই একমাত্র সত্তা। গাণিতিক ভাব এই ভাবের অঙ্গ, কিন্তু নিম্নতর। গাণিতিক ভাব ইন্দ্রিয়গ্রাহ্য ও উচ্চতম ভাবের মধ্যবর্তী। উচ্চতম ভাব হচ্ছে **মঙ্গল, সত্য, ন্যায় ও সৌন্দর্য**। প্লেটোর দার্শনিক তত্ত্বে গণিতের দ্বৈত ভূমিকা। এই ভাব সত্তার অংশ বটে, কিন্তু তারা আবার বহির্জগতের ভাবের সম্বন্ধে মনের শিক্ষাও দেয়। তাঁর মতে—**"Geometry will draw the soul toward truth, and create the spirit of philosophy."**[১]

অ্যারিস্টটল প্লেটোর সাক্ষাৎ ছাত্র এবং তাঁর **অ্যাকাডেমী**-র **মন** (**mind**)। সুতরাং তিনি যে প্লেটোর দার্শনিক-ভাবনায় বহুল পরিমাণে প্রভাবিত হবেন, তাতে সন্দেহ নেই। কিন্তু প্রতিভাশালীদের নিজস্ব বৈশিষ্ট্য ও সত্তার বিকাশ হতে বিলম্ব হয় না। অ্যারিস্টটলের ক্ষেত্রেও তাই হয়েছিল। বাস্তব জগৎ সম্বন্ধে তাঁর ধারণা, প্রত্যয়-প্রতীতি তাঁর শিক্ষাগুরুর চেয়ে পৃথক ছিল ; জাগতিক সত্তার অনুশীলন-অনুসন্ধান বিষয়ে গণিতের সম্পর্ক সম্বন্ধেও তাঁর ধারণা অন্যরূপ ছিল। বিজ্ঞানানুশীলনকে সম্পূর্ণ গাণিতিক অনুশীলনে পর্যবসিত করার জন্য তিনি গুরুর সমালোচনা করেছেন।

অ্যারিস্টটল ছিলেন প্রাধানত পদার্থবিদ। তিনি জড় বস্তুর মধ্যে সত্তার উৎস খুঁজেছেন। তাঁর মতে, ভৌত বিজ্ঞানই প্রাকৃতিক অনুসন্ধানের মূল ; গণিত শুধুমাত্র বস্তুসমূহের গুণাগুণ বা ধর্ম নির্ধারণে ও বর্ণনায় সাহায্য করে ; জড় বস্তুর নানা ঘটনার ব্যাখ্যায় গণিত তথ্য প্রদান করে মাত্র। যেমন,—জ্যোতির্বৈজ্ঞানিক ও আলোকের ঘটনাসমূহের তথ্য জানা যায় জ্যামিতির মাধ্যমে ; পাটীগণিতের সমানুপাত প্রদান করে ঐক্যের কার্য-কারণ তথ্য বা বিবরণ। বাস্তব জগতের বিমূর্ততা থেকেই গণিতের আবির্ভাব। গাণিতিক বস্তুসমূহ অভিজ্ঞতানিরপেক্ষ নয় এবং অভিজ্ঞতাপূর্বও নয়। মানুষের মনে গাণিতিক ভাবনা এক শ্রেণীর

১. **The Republic, Book—VII,**

ভাব (**idea**) হিসাবে বর্তমান আছে। এই ভাব (**idea**) ইন্দ্রিয়গ্রাহ্য বস্তু ও বস্তুর **essence**-এর মধ্যবর্তী। গণিত একাকী দ্রব্যের সংজ্ঞা দিতে পারে না। গুণগত পার্থক্যকে (যেমন, বিভিন্ন রঙের মধ্যে) জ্যামিতিক পার্থক্যে পর্যবসিত করা যায় না। সুতরাং প্রকৃত কারণ অনুসন্ধানে গণিত আমাদের গতানুগতিক কারণ (**Formal Cause**) দিতে পারে অর্থাৎ বর্ণনা বা বিবরণ দিতে পারে। গণিতের সাহায্যে ভৌত জগতে কি ঘটে বলা যায়, কিন্তু **উদ্দেশ্য কারণ (Final cause of movement** বা **change**) সম্বন্ধে কিছু বলা যায় না। অ্যারিস্টটল গণিতের ভবিষ্যদ্বাণীতে আগ্রহী ছিলেন না।

গ্রীকপূর্ব সভ্যতায় প্রকৃতি সম্বন্ধে মানুষের ধারণা ছিল প্রধানত আতঙ্ক ও ভয়ের। প্রকৃতি তার আচরণে বিশৃঙ্খল ও রহস্যময় তো বটেই, তা ছাড়াও সে অশেষ ভয়ের কারণ। প্রাকৃতিক ঘটনা ও রহস্যময়তার পশ্চাতে আছে দেবদেবীরা। তারাই ইচ্ছামত, খেয়াল-খুশী মত প্রাকৃতিক ঘটনাসমূহের নিয়ন্ত্রণ করছে। প্রার্থনা, স্তবস্তুতি, যাদুই কেবল দেবদেবীদের সন্তুষ্ট করতে পারে, তাদের বশীভূত করতে পারে। বস্তুত, তারাই হচ্ছে মানুষের ভাগ্যনিয়ন্তা,—জীবন-মৃত্যুর জীয়নমরণ কাঠি।

খ্রীস্টপূর্ব 600 থেকে গ্রীক মনস্বীদের প্রকৃতি সম্বন্ধে সম্পূর্ণ নতুন ধরনের দৃষ্টিভঙ্গী লক্ষ করা যায়। দেবদেবীদের সর্বাত্মক ক্ষমতা ও পৌরাণিকতা এই মনস্বীরা অবশ্য অস্বীকার করেননি। তা হলেও তখন গ্রীক মননশীলতা প্রকৃতি সম্বন্ধে এরূপ ধারণা করতেন যে, প্রকৃতি প্রকৃতপক্ষে শৃঙ্খলাবদ্ধ, নিয়মবদ্ধ এবং নির্দিষ্ট কাঠামোর পরিপ্রেক্ষিতে সব-কিছু ঘটছে। মানুষের মন অশেষ ক্ষমতা-সম্পন্ন, অতি উচ্চ। মানুষ প্রাকৃতিক ঘটনা থেকে শিক্ষা পেতে পারে এবং তার ভবিষ্যদ্বাণীও করা যায়। প্রকৃতি সম্বন্ধে এই চেতনা মানবসভ্যতার অন্যতম শ্রেষ্ঠ সম্পদ, গৌরবের ও সভ্যতার উন্নতি ও সমৃদ্ধিতে যে অতীব মূল্যবান অবদান, তা অস্বীকার করার উপায় নেই।

গ্রীক মনস্বীরা নৈয়ায়িক ও বিজ্ঞানমনস্ক হলেও জনসাধারণ যে এরূপ ছিল, তা বলা যায় না। বস্তুত, সর্বকালেই বৈজ্ঞানিকচেতনাসম্পন্ন মানুষ অতি অল্প। এ'রা সভ্যতার ধারক ও বাহক হলেও সমাজের বৃহত্তর অংশ চিরকালই সংস্কারাচ্ছন্ন, বিজ্ঞানচেতনাবিমুখ, নানা দৈব, অলৌকিকতা, দেবদেবী, ভূতপ্রেত, দৈত্যদানবে বিশ্বাসী। গ্রীসেও এর ব্যতিক্রম দেখা যায় না। এশিয়া মাইনরের পশ্চিম উপকূলে আয়োনিয়ায় জ্ঞান-বিজ্ঞানের গৌরবময় অভ্যুদয়। এখানেই যুক্তিতর্কের সাহায্যে প্রকৃতিকে ব্যাখ্যা ও বিশ্লেষণ করা শুরু হয়,—উদ্ভট কল্পনাপ্রসূত চিন্তাধারা, কবিদের ভাবোচ্ছ্বাসমূলক ভাবনা সংহত হয়ে বস্তুতান্ত্রিকতার সূচনা হয়। এই সম্পর্কে একজন গণিতের ঐতিহাসিক বলেন,—"**At least these men dared to tackle the universe with their minds and refused to rely upon**

gods, spirits, ghosts, devils, angels and other mythical agents."[২]

গ্রীক মননশীল সমাজে যে-সব দার্শনিক একাধিপত্য বিস্তার করেছিলেন এবং যাঁরা গ্রীক সংস্কৃতির ধারক ও বাহকরূপে এই জাতিকে বিশ্বসমাজে সুপ্রতিষ্ঠিত করেছিলেন, তাঁরা সকলেই এক বাক্যে প্রকৃতি অনুধাবন করার ওপর গুরুত্ব আরোপ করেছেন এবং এর সাহায্যেই সত্তার উপলব্ধি হবে বলে মনে করেছেন। থ্যালেসের পর পীথাগোরাসের সময় থেকে প্রায় সব গ্রীক দার্শনিকই এই মনোভাব পোষণ করতেন যে, প্রকৃতির রহস্য গাণিতিক কাঠামোয় নিহিত। ক্লাসিক্যাল যুগে এই অভিমত প্রতিষ্ঠিত হয় এবং গাণিতিক সূত্রানুসন্ধান সূচিত হয়। অবশ্য সব গাণিতিক আবিষ্কারের পশ্চাতে এই তত্ত্ব কার্যকর না হলেও অধিকাংশ গণিতজ্ঞ এই অভিমত অনুসারে অনুসন্ধান করেছেন। টলেমী মনে করতেন, গাণিতিক তত্ত্ব সম্পূর্ণ মানবিক প্রচেষ্টা, প্রকৃতির পারম্পর্যপূর্ণ ও সংগঠিত ব্যাখ্যা।

গাণিতিক প্রেরণা ও কৃতিত্ব

ইউক্লিড, অ্যাপোলোনিয়াস, আর্কিমিডিসের জ্যামিতির অংশবিশেষ ব্যতিরেকে অন্য কোন গ্রীক গ্রন্থে গণিতজ্ঞদের গবেষণা-প্রেরণার কারণ জানা যায় না। অন্যসব গ্রন্থে অবরোহী যুক্তির পরাকাষ্ঠাসহ গণিতের ফলসমূহ লিপিবদ্ধ আছে। এতে আধুনিক পাঠ্যপুস্তকের সাদৃশ্য দেখা যায়। গাণিতিক গবেষণার প্রেরণার খবর এতে নেই, তত্ত্ব ও তথ্যাদির আহরণ, গবেষণা-সূত্র, সমস্যার উদ্ভব ইত্যাদি কিছুই জানা যায় না।

গণিতে গ্রীক কৃতিত্ব মূল্যায়ন করতে হলে, তাদের লক্ষ্য ও উদ্দেশ্য সম্পর্কে ওয়াকিবহাল হতে হয়। ভৌত প্রকৃতির উপলব্ধি ও ব্যাখ্যা করার জন্যই গণিতে তাদের আগ্রহ, আর এই কারণেই গণিতের প্রতি অত্যাধিক মূল্যারোপ। কোন দৃষ্টিভঙ্গী ও বৈজ্ঞানিকচেতনার বশবর্তী হয়ে গ্রীকরা গণিতানুশীলন করেছে, তা পূর্বে আলোচনা করেছি।

গণিতে তত্ত্ব বা তত্ত্বাদি আবিষ্কারের পশ্চাতে ঠিক কোন্ ধরনের মানসিকতা ছিল, তা নিশ্চিত করে বলার উপায় নেই। গ্রীক গণিতজ্ঞরা সাক্ষ্য প্রমাণাদি বিষয়ে একেবারে নীরব। কেবল টলেমী তাঁর অ্যালমাজেস্ট-এর এক জায়গায় বলেছেন, তাঁর ত্রিকোণমিতি চর্চা একমাত্র জ্যোতির্বিজ্ঞানের গবেষণার জন্য। এখানে আর একটি বিষয় উল্লেখ করা যেতে পারে; ইউডক্সাস, ইউক্লিড প্রমুখের গবেষণা থেকে দেখা যায় যে, তাঁরা কেবল গাণিতিক অনুসন্ধানেই নিজেদের

২. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times—M. Kline, Page-147.

ব্যাপৃত রাখেননি, অন্য বিষয়ের ওপর গবেষণা ও গ্রন্থাদি রচনা করেছিলেন। যেমন,—ইউক্লিড *Phaenomena, Optics, Catoptrica, Elements of Music,* এমন কি বলবিদ্যাসংক্রান্ত গ্রন্থাদিও রচনা করেছিলেন। এই ক্ষুদ্র অথচ ইঙ্গিতবহ তথ্য থেকে একটি সিদ্ধান্ত করা যেতে পারে ঃ তখন গণিত বিচ্ছিন্ন কোন বিষয় হিসেবে গণ্য হতো না ; সম্ভবত অন্যান্য সম্পর্কিত বিষয়ের অঙ্গ হিসাবে বিবেচিত হতো। অন্তত গাউস ও অয়লারের গাণিতিক গবেষণার প্রেরণার সঙ্গে মিলিয়ে দেখলে মনে হয় সঙ্গীত, জ্যোতির্বিজ্ঞান, আলোকবিদ্যা থেকে উদ্ভূত নানা সমস্যা থেকে গাণিতিক সমস্যার উদ্ভব হয়ে থাকবে।

গ্রীকদের সর্বশ্রেষ্ঠ কৃতিত্ব হচ্ছে তারা গণিতকে বিমূর্ত করে তুলেছিল। বস্তুত, এই অবদান তাৎপর্যপূর্ণ ও ইঙ্গিতবহ এই কারণে যে, একই বিমূর্ত ত্রিভুজ বা বীজগাণিতিক সমীকরণ বিভিন্ন ভৌত অবস্থায় প্রয়োগ করা যেতে পারে। গণিতের এই বিমূর্ত চরিত্রের জন্য এর প্রয়োগ জ্ঞান-বিজ্ঞানের প্রায় সব শাখায় হচ্ছে। সত্য কথা বলতে কি, সর্বত্রগামী গণিতের ক্ষমতা সুপ্ত আছে তার বিমূর্ততায়।

অবরোহী পদ্ধতির প্রতি আকর্ষণ গ্রীকজাতির একটি দুর্লভ গুণ। প্রাচীনতার নিরিখে গ্রীকসভ্যতা নবীন।* তাদের আগে বিশ্বের অন্যত্র সভ্যতার অভাব ছিল না। সভ্যতার বিকাশের ধারায় তাদের দান তুচ্ছ করার নয়। তাদের নিজস্ব গণনা পদ্ধতি ছিল, জ্যামিতি ছিল। কিন্তু কোন সভ্যতাই অবরোহী পদ্ধতির সাহায্যে সিদ্ধান্ত প্রকাশ করেনি। বস্তুত, অন্যান্য সভ্যজাতি যে-সব পদ্ধতির সাহায্যে সিদ্ধান্ত প্রকাশ করেছে, অবরোহী পদ্ধতি তার থেকে সম্পূর্ণ পৃথক। গ্রীকদের ছিল সত্যানুসন্ধানের প্রতি অনুরাগ ও ভালবাসা। অবরোহী পদ্ধতির মাধ্যমেই তর্কাতীত সিদ্ধান্তে আসা তারা শ্রেয় মনে করেছিল। সত্য থেকেই একমাত্র সত্য প্রতিপন্ন হতে পারে,—এই ধারণা ও প্রত্যয় গ্রীক মননশীলতার চরম উৎকর্ষ। ঠিক এই কারণেই স্বতঃসিদ্ধের উদ্ভব ও অবতারণা। তারা জ্ঞানের সর্বক্ষেত্রেই সুস্পষ্টরূপে স্বতঃসিদ্ধ প্রতিষ্ঠা করে তার আলোকে সবকিছু গভীরভাবে পর্যালোচনা করেছে। এই পরিকল্পনা ছাড়া বিশাল জ্ঞানভাণ্ডারের মণি-রত্ন লুণ্ঠন যে সম্ভব নয়, তা গ্রীক মনস্বিতায় ধরা পড়েছিল। কয়েকটিমাত্র স্বতঃসিদ্ধের সাহায্যে বিপুল সংখ্যক উপপাদ্যের প্রমাণাদি উপস্থাপন করে গ্রীকরা মননচর্চায় দৃষ্টান্ত স্থাপন করেছে। ইউক্লিডের **এলিমেন্টস**-এ 467টি ও অ্যাপোলোনিয়াসের **কনিক সেকসন**-এ 487টি প্রমাণ উপস্থাপিত হয়েছে মাত্র 10টি স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্যের মাধ্যমে। এইসব বিপুল সংখ্যক প্রতিজ্ঞাদির প্রমাণে যদি নানান স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্য ব্যবহৃত হতো, তা হলে গণিতে জ্ঞানার্জন সম্ভব হতো কিনা সন্দেহ।

---

* দ্বিতীয় Urban Revolution-এর সময়ে—600 খ্রীস্টপূর্বাব্দের পর।

গণিতের বিষয়বস্তুতেও গ্রীকদের কৃতিত্ব বিস্মরণ হওয়ার নয়। তাদের সৃষ্টি সামতলিক ও কঠিন বস্তুর জ্যামিতি, সামতলিক ও গোলীয় ত্রিকোণমিতি, আর সংখ্যাতত্ত্ব ; বীজগণিতেও তাদের অবদান স্বীকার করতে হবে। জ্যামিতিক-বীজগণিতই ক্রমে বীজগণিতের রূপ পায়। নিঃশেষীকরণ পদ্ধতির সাহায্যে আবদ্ধ ক্ষেত্রের আয়তন, ক্ষেত্রফল ইত্যাদি নির্ণয় কৃতিত্বপূর্ণ। আধুনিক **কলন**-এর (**Calculus**) বীজ নিঃশেষীকরণ পদ্ধতির মধ্যে নিহিত ছিল।

মানব সভ্যতার ইতিহাসে অমূল্য সংযোজন প্রকৃতি সম্বন্ধে গ্রীকদের দৃষ্টিভঙ্গী। ইতিমধ্যেই এ বিষয়ে আমরা নাতিদীর্ঘ আলোচনা করেছি।

সৌন্দর্যচেতনা গ্রীকদের অন্যতম বৈশিষ্ট্য। গণিতের সৌন্দর্য আছে, শিল্প-সুষমা আছে,—একথা সাধারণ মানুষের মনে হয় না। গ্রীক যুগে গণিত শিল্প হিসাবে পরিগণিত হতো। গণিতের **ঐক্য, সারল্য, স্পষ্টতা** ও **ক্রম** শিল্পচেতনায় স্বীকৃত হয়েছিল। পাটীগণিত, জ্যামিতি ও জ্যোতির্বিজ্ঞান মনের শিল্প (**art of mind**) বলে বিবেচিত হতো, আর সঙ্গীত ছিল আত্মার শিল্প।

প্লেটোর গণিতপ্রীতি তথা জ্যামিতিপ্রীতি সর্বজনবিদিত। অ্যারিস্টটল সৌন্দর্য থেকে গণিতকে বিচ্ছিন্ন করেননি। তাঁর কাছে **ক্রম (order)** ও **প্রতিসাম্য (symmetry)** সৌন্দর্যের উপাদান বলে গণ্য হতো। বস্তুতপক্ষে, গ্রীকভাবনা থেকে **বিচার, সৌন্দর্য, আধ্যাত্মিকতা** বিচ্ছিন্ন করা যায় না। **গোলক** সবচেয়ে সুন্দর ; তাই সুন্দর ও শুভ বা কল্যাণকর। বৃত্তের সঙ্গে আছে গোলকের সাদৃশ্য ; সুতরাং সেইসব বস্তুর পথ হবে অপরিবর্তনীয় ও নিত্য শাশ্বত স্বর্গের প্রতীক হবে বৃত্ত। আর সরলগতি হবে অসম্পূর্ণ পৃথিবীর। যে-সব ক্ষেত্রে আপাত অব্যবহারিক বিষয়ে গ্রীকদের গবেষণা দেখা যায়, তা তাদের সৌন্দর্যচেতনার ফলশ্রুতি।

গণিতে গ্রীকদের অবদান ও কৃতিত্বের আলোচনায় তাদের গণিতে **সীমাবদ্ধতার** কথা অবশ্যই বলতে হয়। গ্রীক গণিতের সীমাবদ্ধতার কথা বলতে গেলেই সংখ্যার অমূলদত্ব সম্পর্কে তাদের চিন্তার দীনতার কথা বলতে হয়। এর ফলে তাদের পাটীগণিত ও বীজগণিত বিশেষভাবে ক্ষতিগ্রস্ত হয়। বস্তুত গণিতের এই দুই শাখার সমৃদ্ধিতে তাদের তেমন অবদান নেই বললেই চলে। এ-বিষয়ে প্রাচীন ভারতীয় গণিতজ্ঞদের অবদান সবিশেষ উল্লেখযোগ্য।[৩] অমূলদ সংখ্যার প্রকৃতি ও স্বরূপ ঠিক মত না জানতে পারায় জ্যামিতি আলোচনা অত্যধিক গুরুত্ব পায়। পরবর্তীকালে **আর্কিমিডিস, হীরন, টলেমী** প্রমুখ গণিতজ্ঞরা অমূলদ সংখ্যা নিয়ে আলোচনা শুরু করেছিলেন বটে, কিন্তু তাঁরা ট্রাডিশন বদল করতে পারেননি। ফলে, বীজগণিত ও জ্যামিতি পরস্পর সম্পর্কিত বিষয় হয়ে উঠতে পারেনি,—বিচ্ছিন্ন হয়ে রয়ে গেছে।

---

৩. লেখকের 'প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিবৃত্ত'—চতুর্দশ-ষোড়শ অধ্যায় দ্রষ্টব্য।

গ্রীক গণিতের অবক্ষয় ও পতন

গ্রীক সভ্যতা ও সংস্কৃতি ধ্বংসের অন্যতম প্রধান কারণ যে রোমান আক্রমণ ও বর্বরতা, এ-সম্পর্কের সন্দেহের কম অবকাশ আছে। কিন্তু কেবল রোমানদের এইজন্য সম্পূর্ণ দায়ী করা যায় না। গ্রীক সমাজ-ব্যবস্থা, গ্রীক সম্বন্ধীয় বিশেষ দৃষ্টিভঙ্গী তথা তাঁদের অন্তঃসারশূন্যতা এর জন্য কম দায়ী ছিল না। গ্রীক গণিতের অবক্ষয় ও পতনের কারণগুলি জানতে হলে, গ্রীক সমাজ-জীবনের পরিচয় নেওয়া প্রয়োজন।

খ্রীস্টপূর্ব সপ্তম শতাব্দীর প্রথমার্ধে এথেন্সে গণতন্ত্র থাকলেও, তা ছিল মূলত অভিজাততন্ত্র। সাংবিধানিক পরিবর্তনের মাধ্যমে এই শতাব্দীর মধ্যভাগে সমাজের পরিবর্তন সূচিত হয়। এই সময় স্বাধীন জনতা তিন শ্রেণীতে বিভক্ত ছিল: **অভিজাত, কৃষক** ও **ব্যবসায়ী**। এ-ছাড়া ছিল বহু সংখ্যক ভূমিহীন শ্রমিক। এরা অন্যের জমিজমা চাষবাস করে জীবিকা নির্বাহ করত। রাষ্ট্রে এদের কোন অধিকার ছিল না; এদের না ছিল রাজনৈতিক অধিকার, আর না গণতান্ত্রিক অধিকার। **ড্রেকোন** প্রবর্তিত দেওয়ানী আইনে উত্তমর্ণ অধমর্ণকে ক্রীতদাসে পরিণত করতে পারত। সাধারণ মানুষ অশেষ দুঃখ কষ্টে জীবন যাপন করত। অর্থের অভাবে কৃষকদের চড়া সুদে কর্জ করতে হতো। ঋণ শোধ করতে না পেরে তারা জমিজমা হারিয়ে ক্রীতদাসে পরিণত হতে থাকল। জ্ঞানী **সোলন আর্কন** হিসাবে নির্বাচিত হওয়ার পর অবশ্য এই অবস্থার কিছুটা উন্নতি হয়। তিনি বন্ধকী দলিল নাকচ, ঋণ মকুব এবং ঋণগ্রস্ত ক্রীতদাসদের মুক্তির ব্যবস্থা করলেন। বস্তুত, এই সংস্কারের ফলে নির্যাতিত ও নিপীড়িত মানুষ রাষ্ট্রে ও সমাজে স্থান পেল।

গ্রীসের স্বর্ণ যুগেও অর্থাৎ খ্রীস্টপূর্ব পঞ্চম শতাব্দীতে গ্রীসে প্রধানত তিন শ্রেণীর জনগোষ্ঠী দেখা যায়: **নাগরিক, বিদেশী** ও **ক্রীতদাস**। নাগরিকদের ছিল সব রকম সুযোগ-সুবিধা, স্থাবর সম্পত্তির মালিক, রৌপ্য খনির লভ্যাংশ ইত্যাদি। নাগরিকত্ব অর্জনের পথে ছিল বহু বাধা। নাগরিকরা ব্যবসা-বাণিজ্যে অংশগ্রহণ করত না; একে সম্মানজনক বৃত্তি বলেই মনে করত না। বিদেশীদের মধ্য থেকে আসত দোকানদার, শ্রমিক আর কুশলী শিল্পী। ক্রীতদাসরাও এইসব বৃত্তি গ্রহণ করত।

দাস শ্রেণীর বহু লোক বাস করত গ্রীসের সর্বত্র। যাদের পিতামাতা ক্রীতদাস ছিল, তাদের অবস্থা ছিল অবর্ণনীয়। অবশ্য তখন এরা ব্যক্তিবিশেষের সম্পত্তি ছিল না,—রাষ্ট্রের অধীনে ছিল। গুপ্ত পুলিশ বাহিনী সব সময় এদের গতিবিধির ওপর নজর রাখত। রাষ্ট্রের অনুগ্রহের ওপর এদের বাঁচন-মরণ নির্ভর করে ছিল। পেলোপোনেসীয় যুদ্ধের সময় কেবল সন্দেহের অবকাশে স্পার্টায় দু-হাজার **হেলট**-কে বিনা অপরাধে হত্যা করা হয়েছিল। বস্তুত, গ্রীস অভিজাত ও ধনীদের পোষণ করেছে, সাধারণ মানুষকে মানুষ হিসাবে জ্ঞান করেনি। মনুষ্যত্বের এমন

অপমান যেখানে ঘটে, সে-জাতি যে ক্রমশ অন্তঃসারশূন্য হয়ে পড়বে, তাতে আশ্চর্যের কিছু নেই।

অন্যান্য ভূ-খণ্ডের তুলনায় এথেন্সে ক্রীতদাসদের অবস্থা খারাপ ছিলনা। এখানে সাধারণ নাগরিকদের অধীনে তারা বিভিন্ন কার্যে নিযুক্ত হতো। মুদ্রা নির্মাণে, কারখানায়, কেরাণী, আর পরিচারক হিসাবেও তারা নিযুক্ত হতো। শান্তি রক্ষার কাজে, রাষ্ট্রের মূল্যবান দলিলপত্রাদি সংরক্ষণেও তাদের ভূমিকা ছিল। বসবাস, সামাজিক আচার-আচরণে তাদের স্বাধীনতা ছিল। কোন কোন পরিবারে চল্লিশ-পঞ্চাশ জন ক্রীতদাসও ছিল। এথেন্সে স্বাধীন নাগরিকের সংখ্যা ছিল এক লক্ষ পঞ্চাশ হাজার, আর বিদেশী ও ক্রীতদাসের সংখ্যা ছিল প্রায় এক লক্ষ।

কৃষি ব্যতীত অন্য সব বৃত্তি সম্মানজনক বলে বিবেচিত হতো না। খুব সম্ভব নাগরিকরা বিপুল পরিমাণ জমির মালিক ছিল বলে। দৈহিক পরিশ্রম পণ্যের চোখে দেখা হতো। শ্রমের মর্যাদা ধূলায় লুণ্ঠিত হতো। বিশেষ করে দোকানদার ও ক্ষুদ্র ব্যবসায়ীদের মোটেই সম্মানের চোখে দেখা হতো না। গ্রীসে সেইজন্যই ফলিত বিজ্ঞানচর্চা হয়নি।*

প্রকৃত শিক্ষার খরচ ছিল বিপুল পরিমাণ। সাধারণ মানুষের পক্ষে শিক্ষা অর্জন ছিল স্বপ্নের মত। **প্রোটাগোরাস, গর্গিয়াস ও জেনো** একজন শিক্ষার্থীর কাছে **10,000** দ্রাখমা দাবী করতেন। ব্যাকরণ ও ভাষা শিক্ষার জন্য **50** দ্রাখমা দাবী করা হতো। কুস্তির জন্য রাষ্ট্রীয় অর্থ বরাদ্দ ছিল, কিন্তু শিক্ষার জন্য ছিল না। পণ্ডিত ও জ্ঞানীদের জন্য রাষ্ট্রীয় ভাতার ব্যবস্থা ছিল, কিন্তু সাধারণের শিক্ষার জন্য কিছুই ছিল না। তাই, গ্রীসের সাধারণ মানুষ কম কুসংস্কারাচ্ছন্ন ছিল না।

খ্রীস্টীয় শতাব্দীর প্রারম্ভকাল থেকেই গ্রীক সভ্যতা তথা গ্রীক গণিতের উদয়-রবি অস্তাচলগামী হতে শুরু করে। খ্রীস্টীয় শতাব্দীর পর সবিশেষ উল্লেখযোগ্য অবদান যাঁরা রেখে গেছেন, তাঁরা হলেন **টলেমী ও ডায়োফ্যাণ্টাস**। প্রখ্যাত ভাষ্যকার **প্যাপাস ও প্রোক্লাস** অবশ্যই ছিলেন, কিন্তু তাঁরা গণিতের প্রাণশক্তির অবক্ষয় রোধ করতে পারেননি। ইতিহাসের গতিপথ, রাজনৈতিক উত্থান-পতন গণিতকে বোধ করি সর্বাপেক্ষা অধিক পরিমাণে নিয়ন্ত্রিত করে,—বিশেষত আর্থ-সামাজিক অবস্থা। প্রাচীন ভারতীয় গণিতে বিশেষত মধ্যযুগীয় গণিত সম্বন্ধে এই

---

* এই প্রসঙ্গে বি. ডি. নাগচৌধুরীর মন্তব্য বিবেচনা করার মত : 'the pressure of social needs is so apparent in many of the processes of our innovation—the plough, the window and the safety match—that the coupling between technology and society cannot be thought of as the inhovator's innate drive, without any social interaction'.—*Technology & Society*, P—7

কথাটি যেরূপ প্রযোজ্য, গ্রীক গণিত সম্বন্ধেও ঠিক সেরূপ প্রযোজ্য। এই প্রসঙ্গে এক গণিতের ঐতিহাসিকের চমৎকার মন্তব্যটি স্মরণযোগ্য ঃ **"unfortunately, mathematicians are subject to the forces of history as lowliest peasant."**[৪]

আলেকজান্দ্রিয় যুগে গণিতের বিকাশ ও সমৃদ্ধির অনুকূল পরিবেশ ছিল। এ-বিষয়ে টলেমী রাজবংশের উদার মনোভাব, জ্ঞান-বিজ্ঞান প্রসারে স্বচ্ছ দৃষ্টিভঙ্গী এবং যোগ্য প্রতিভার সমাদর হওয়ায় গণিত নতুন পথে অগ্রসর হয়। কিন্তু প্রথম দু-তিনজন টলেমী শাসনের পর সঙ্কট দেখা দিল। টলেমী বংশধররা গ্রীক অপেক্ষা অধিক পরিমাণে মিশরীয় হয়ে গেল,—পুরোহিততন্ত্র, কুসংস্কার ও যাদুমন্ত্রের জালে জড়িয়ে পড়ল। ঠিক এই যুগসন্ধিক্ষণে রোমানদের আগমন গণিতের তথা গ্রীক সংস্কৃতির সর্বনাশ সূচিত করল। গণিতের ইতিহাসে রোমানদের ভূমিকা ছিল বিধ্বংসীর,—তারা ছিল গণিতের শত্রু।

গণিতের অবক্ষয় ও পতনে রোমানরা দায়ী হলেও সম্পূর্ণ দায়ী নয়। গ্রীকদের অন্তঃসারশূন্যতা যে এজন্য দায়ী, তার রূপরেখা আমরা ইতিপূর্বে দিয়েছি ; আর গ্রীক নগর রাষ্ট্রের বিলোপসাধনও এর জন্য কম দায়ী নয়। এর জন্য আলেক-জাণ্ডারকে দায়ী করা যায়। তাঁর মৃত্যুর পর বিশাল গ্রীক সাম্রাজ্য যেভাবে ভাগ বাঁটোয়ারা হয়েছিল, তাতে মনে হয় গ্রীকজাতি বিশাল সাম্রাজ্যের অন্তর্ভূক্ত হয়ে একজন শাসনকর্তার অধীনে থাকার চেয়ে পৃথক পৃথক ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র রাষ্ট্রে বিভক্ত হয়ে থাকাই শ্রেয় মনে করত। রোমানরা মূল গ্রীক ভূখণ্ড অধিকার করার পরও গ্রীক জ্ঞান-বিজ্ঞানচর্চা অব্যাহত ছিল। তারা যত বর্বরই হোক, প্রথম দিকে গ্রীকদের *Pagan* বলে ধ্বংস করার দিকে অগ্রসর হয়নি। বস্তুত, বিশাল জনগোষ্ঠীকে সভ্যতা ও সংস্কৃতির ধারক ও বাহকরূপে অম্বিত না করে মুষ্টিমেয় জনকয়েক অভিজাত মনস্বী একটি সভ্যতাকে বাঁচিয়ে রাখতে পারেনা। গ্রীকসভ্যতার এটা এক সকরুণ ট্রাজেডী, উদ্‌বৃত্তভোগীদের অন্তিম পরিণতি!

রোমানরা ছিল বাস্তববুদ্ধিসম্পন্ন মানুষ এবং তারা এজন্য গর্ববোধ করত। বড় বড় কারিগরী পরিকল্পনা তারা গড়ে তুলেছিল,—সুন্দর সুন্দর রাজপথ, সেতু, অট্টালিকা এবং জমি জরীপ ইত্যাদিতে তাদের বাস্তব বুদ্ধির পরিচয় পাওয়া যায়। মিশরীয় টলেমীদের মত রোমান সম্রাটরা গণিতের পৃষ্ঠপোষকতা করেনি। রোমানদের বিশুদ্ধ বিজ্ঞানের প্রতি আকর্ষণও ছিল না। গণিতের প্রতি রোমানদের এই মনোভাব সত্যই বিস্ময়কর। কারণ, তাদের বিশাল সাম্রাজ্যের পরিকল্পনা ও শাসনকার্য সম্পাদনে গণিতের প্রয়োজনীয়তা ছিল। তবে তারা যে গণিতের ব্যবহার করেনি, তা নয়। আসলে, তারা যে-সব কাজকর্মে ব্যবহারিক প্রয়োগ

---

৪. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times—M. Kline, Page—178

করত, তা যে সূক্ষ্ম ও বিশুদ্ধ গাণিতিক তত্ত্ব থেকে উদ্ভূত, এই জ্ঞান তাদের ছিল না।

রোমান আক্রমণ ও খ্রীস্টধর্মের উত্থান গণিতের অস্তিত্ব বজায় রাখার পক্ষে প্রতিকূল হয়েছিল।* বস্তুত, গ্রীক সভ্যতা ও সংস্কৃতি এবং গণিতের বিকাশ ও সমৃদ্ধি এ-যুগে না হলেও, এই ধারা যে ক্ষীণ কলেবরে বয়ে চলেছিল, তা স্তব্ধ হয়ে গেল রোমান ও খ্রীস্টানদের যুগ্ম প্রচেষ্টায়। তাই, এই পর্বের ইতিহাসের ক্ষুদ্র অংশটুকু আমাদের জানা প্রয়োজন।

উত্তর ও মধ্য ইটালীর ওপর শাসনব্যবস্থা কায়েম করার পর রোমানরা দক্ষিণ ইটালী ও সিসিলি অধিকার করে। গ্রীস তাদের নিয়ন্ত্রণে আসে 146 খ্রীস্টপূর্বাব্দে এবং মেসোপটেমিয়া 64 খ্রীস্টপূর্বাব্দে। ক্লিওপেট্রা ও টলেমী বংশের শেষ প্রতিনিধিদের মধ্যে বিবাদের সুযোগে সিজার মিশর অধিকার করে। 47 খ্রীস্টপূর্বাব্দে সিজার আলেকজান্দ্রিয়া বন্দরে নৌবাহিনীতে অগ্নিসংযোগ করায় সেই আগুন শহরে ছড়িয়ে পড়ে এবং বিখ্যাত গ্রন্থাগারটিকে গ্রাস করে। প্রায় আড়াই শ' বছরের সংগৃহীত পুস্তক ও অর্ধ মিলিয়ন পাণ্ডুলিপি ভস্মীভূত হয়। সৌভাগ্যক্রমে এই গ্রন্থাগারে স্থানাভাববশত কিছু পুস্তক **সেরাপিস** (Serdapis) মন্দিরে রক্ষিত ছিল।

31 খ্রীস্টপূর্বাব্দে ক্লিওপেট্রার মৃত্যুর পর রোমানরা পুনরায় মিশরে প্রত্যাবর্তন করে। রোমানরা ক্ষমতা বিস্তার করেছে, বিজিত রাজ্যে উপনিবেশ স্থাপন করেছে, কর আদায় করেছে, কিন্তু তাদের ঐতিহ্য ও সংস্কৃতি বিস্তার করেনি। বেশীরভাগ সম্রাটরা ছিল স্বার্থলোলুপ। তাই, তারা যে দেশ অধিকার করেছে, সেই দেশই ধ্বংস করেছে। উত্থান-পর্বে এই জাতি কঠোর জীবনযাপন করতে দ্বিধা করে নি, উপবাস পর্যন্ত করেছে, কিন্তু বিজয়ের পর তারাই আবার সেই দেশকে ধ্বংস করেছে, হাজার হাজার মানুষকে নির্বিচারে হত্যা করেছে।

খ্রীস্টীয় চতুর্থ শতাব্দীতে **থিওডোসিয়াস** (Theodosius, 379-95) তাঁর দুই পুত্রের মধ্যে বিশাল সাম্রাজ্য ভাগ করে দিলেন। **হনোরিয়াস** (Honorius) ইটালী ও পশ্চিম ইউরোপের শাসনভার পেলেন, আর **আরকাডিয়াস** (Arcadius) গ্রীস, মিশর ও পূর্বাঞ্চলের শাসনভার পেলেন। পঞ্চম শতাব্দীতে গথ আক্রমণে পশ্চিমাংশ তাদের অধীনে যায়, আর পূর্বাংশ 1453 খ্রীস্টাব্দ পর্যন্ত মোটামুটি স্বাধীন ছিল। ইতিহাসে এই পূর্বাংশ বাইজানটাইন সাম্রাজ্য নামে পরিচিত। বস্তুত, রোমানরাও প্রবল পরাক্রমে দীর্ঘদিন সুখেশান্তিতে রাজত্ব করতে পারেনি। তৃতীয় খ্রীস্টাব্দ থেকেই **বর্বর আক্রমণ** শুরু হয়,—ফ্রাঙ্ক, আলামান্নি, গথদের আক্রমণে রোমান সাম্রাজ্যের এলাকা ক্রমশ সঙ্কুচিত হতে থাকে। চতুর্থ শতাব্দীতে

* ব্রাহ্মণ্য ও পৌরাণিক ধর্মের উত্থান ও প্রাবল্যে প্রাচীন ভারতে বিজ্ঞানের এই অবস্থা হয়। দ্রষ্টব্য: *History of Hindu Chemistry*, vol-I, P. C. Ray, Page—192-197

ভ্যাণ্ডাল ও হূণ আক্রমণে পশ্চিম রোমান সাম্রাজ্য ভেঙে পড়ে। পঞ্চম শতাব্দীর একেবারে গোড়ায় (410 খ্রীস্টাব্দে) গথ আক্রমণে রোম হাত ছাড়া হয়। এ হেন পরিবেশ যে জ্ঞান-বিজ্ঞান চর্চার পক্ষে অনুকূল নয়, তা বলাই বাহুল্য। এই প্রসঙ্গে সমরেন্দ্রনাথ সেন মহাশয় লিখেছেন ঃ "এই তিন শত বৎসরে ইউরোপে শান্তি ও নিরাপত্তা বলিয়া কিছু ছিল না। মানুষের জীবন, ধন, সম্পত্তি সর্বদাই বিপদগ্রস্ত। ভবিষ্যতের আশা ও ভরসা প্রত্যেকের মন হইতে মুছিয়া গিয়াছে। সমস্ত ইউরোপ পরিণত হইয়াছে অসংখ্য হতভাগ্য উদ্‌বাস্তু নরনারীর শিবিরে। রাজনৈতিক বিপর্যয়ের সঙ্গে আসিয়াছে সমাজ-জীবনেও দারুণ বিশৃঙ্খলা, অসন্তোষ ও ব্যাপক নৈরাশ্য।"[৫]

এ তো গেল রাজনৈতিক দিকের আলোচনা। এছাড়াও আর একটি দিক ছিল যা বিজ্ঞান তথা গণিতের অবক্ষয় ও পতনকে ত্বরান্বিত করেছিল। খ্রীস্টধর্মের উত্থান গণিতের পক্ষে শুভ হয় নি। খ্রীস্টীয় ধর্মীয় নেতারা যদিও বহু গ্রীক পুরাণ-উপাখ্যান, রীতি-নীতি গ্রহণ করেছিল, তবুও তারা পৌত্তলিক গ্রীকদের শিক্ষার বিরোধিতা করেছিল এবং গণিত, জ্যোতির্বিজ্ঞান ও ভৌত বিজ্ঞানের প্রতি ছিল তাদের উপহাস, ঠাট্টা-বিদ্রূপ। এই প্রসঙ্গে সেণ্ট আগস্টিনের অভিমত উদ্ধৃত হলো ঃ **"Those imposters the mathematicians (i.e., astrologers)··· who use no sacrifice, nor pray to any spirit for their divinations which arts christian and true piety constantly rejects and condems."**[৬] খ্রীস্টানদের গ্রীকদের সঙ্গে মেলামেশা, সংযোগ রক্ষা করা নিষিদ্ধ ছিল। রোমানদের দ্বারা নির্যাতন ও নিপীড়ন সত্ত্বেও খ্রীস্টান ধর্মের ব্যাপক প্রসার ঘটল, এবং তারা বেশ ক্ষমতার অধিকারী হলো। ফলে, বাধ্য হয়ে কনস্টানটাইন (272-337) খ্রীস্টান ধর্মকে স্বীকৃতি দিলেন। খ্রীস্টানরা গ্রীক সংস্কৃতি ও ঐতিহ্য ধ্বংসের সুবর্ণ সুযোগ পেল। রোমান সম্রাট থিওডোসিয়াস গ্রীকধর্ম নিষিদ্ধ করলেন এবং মন্দির ধ্বংসের নির্দেশ দিলেন। সাম্রাজ্যের সর্বত্র গ্রীকদের আক্রমণ এবং খুন করা হতে থাকল। এমনি এক সময়ে বিদুষী হাইপেসিয়াকে পাথর ছুঁড়ে নগ্ন করে খুন করা হলো।

হিটলার নাৎসী বাহিনী গঠন করে যে অমানুষিক কাজ করেছিল, তা এখনো মানুষের মন থেকে মুছে যায় নি। বস্তুত, এই নরমেধ যজ্ঞের চেয়েও রোমান ও খ্রীস্টানদের গ্রীক ধ্বংস ছিল যেন আরো ব্যাপক। হাজার হাজার গ্রীক গ্রন্থে অগ্নিসংযোগ করা হলো। থিওডোসিয়াস 10 বছর যাবৎ গ্রীকধর্ম নিষিদ্ধ করলেন, আর সেরাপিসের মন্দিরও ধ্বংস করা হলো। বহু দিনের বহু শ্রমে সংগৃহীত 300,000 পাণ্ডুলিপি ধ্বংস করা হলো। অবশেষে 529 খ্রীস্টাব্দে জাস্টিনিয়ান

---

৫ বিজ্ঞানের ইতিহাস (প্রথম খণ্ড)—সমরেন্দ্রনাথ সেন, পৃ—315

৬ From Magic to Science, Singer, Page—84

সব গ্রীক দার্শনিক প্রতিষ্ঠান বুদ্ধ করে দিলেন,—প্লেটোর বিখ্যাত অ্যাকাডেমীও বাদ গেল না। গ্রীক পণ্ডিতরা স্থান ত্যাগ করে প্রাণ বাঁচাবার প্রয়াস পেলেন।

সর্বশেষ আঘাত হানল মুসলমানরা 640 খ্রীস্টাব্দে। অবশিষ্ট গ্রন্থগুলি অগ্নি প্রজ্জ্বলিত করে ভস্মীভূত করানো হলো এই যুক্তিতে যে, হয় এতে কোর্‌আন-এর বিষয়বস্তু আছে অথবা না থাকলে পড়ার দরকার নেই। মুসলমান অধিকারের পর অধিকাংশ পণ্ডিত চলে এলেন কনস্টান্টিনেপলে। জ্ঞান-বিজ্ঞানচর্চার ক্ষীণ প্রদীপ এখানে জ্বলছিল রেনেশাঁর আগে পর্যন্ত।

পরিশিষ্ট

১

ভারত-গ্রীক সংযোগ

সভ্যতার আদিপর্বে পৃথিবীর বিশাল ভূখণ্ডের অতি সামান্য অংশেই সভ্যতা-সংস্কৃতির উদ্ভব ও বিকাশ হয়েছিল। প্রাচীন সভ্যতার সঙ্গে মিশর, ব্যাবিলন, চীন, ভারত ও গ্রীসের নাম যুক্ত। বলা বাহুল্য, মানব সভ্যতার বিকাশ, উন্নতি ও সমৃদ্ধিতে এই পাঁচটি দেশের নাম শ্রদ্ধার সঙ্গে স্মরণীয়। ভাষার দিক থেকে দেখলে ভারত ও গ্রীসের মধ্যে বিশেষ সম্পর্ক আছে,—উভয় ভাষায় ইন্দো-ইউরোপীয় বৈশিষ্ট্য লক্ষ করার মত। কিন্তু ইতিহাসের সন-তারিখ তথা ক্রমপঞ্জীর হিসাবে গ্রীক সভ্যতা সবার পরে এসেছে,—ভারতের পরে তো বটেই। বয়সে নবীন হওয়ায় গ্রীসের পক্ষে সুবিধা হয়েছিল এবং সুযোগ গ্রহণ করার অবকাশও তাদের হয়েছিল,—তারা মানব সভ্যতার বিশাল এক উত্তরাধিকার লাভের সুযোগ পেয়েছিল। পূর্ববর্তী প্রাচীন সভ্য দেশসমূহে যে চিন্তা-ভাবনার উদ্ভব ও বিকাশ হতে দীর্ঘ সময় লেগেছে এবং তারা তিল তিল করে সঞ্চয় করেছে, তা গ্রীসের হস্তগত হওয়ায় তাদের পক্ষে জ্ঞান-বিজ্ঞানচর্চার নানা দিকে দ্রুত গতিতে এগিয়ে যাওয়ার সুযোগ হয়েছে এবং পূর্ববর্তীদের ভুলত্রুটি সংশোধন ও সংস্কার করে সঠিক পথে চলতে সুবিধা হয়েছে। বস্তুত, এক ঐতিহাসিক যুগ-সন্ধিক্ষণে গ্রীক জাতির আবির্ভাব,—ভারতে তখন বুদ্ধ ও মহাবীরের আবির্ভাব হওয়ার পূর্বক্ষণ দেখা দিয়েছে। বিশ্ব ইতিহাসের এই পর্বে প্রাচীন সভ্য দেশসমূহে একটা স্থিতিশীলতা দেখা যায়। তখন ইতিহাস যেন এমন একটি জাতির উত্থানের প্রত্যাশায় প্রহর গুনছিল যাতে তার গতি ত্বরান্বিত হয়। ঠিক এই ব্রাহ্মমুহূর্তেই গ্রীক জাতির উত্থান।

আগেই উল্লেখ করেছি, সংস্কৃত ও গ্রীক ভাষা ইন্দো-ইউরোপীয় ভাষার অন্তর্গত। তাই, উভয় ভাষার মধ্যে কিছু সাদৃশ্য দেখা যায়। এখানে তিনটি শব্দের সংস্কৃত ও গ্রীক রূপ দেখানো হলো ঃ

1. সংস্কৃত : চক্রঃ, চক্রস্ —→গ্রীক : কুক্লোস
2. সংস্কৃত : দন্ত, দৎ——→গ্রীক : ওদন্ত (odont-)
3. বৈদিক : মাতৃ বা মাতর্ →গ্রীক : মাতের (mātér), মেতের (métér)

তা ছাড়া শব্দ-বিন্যাসের পদ্ধতি, ধাতু, শব্দ, বিভক্তি, প্রত্যয় ইত্যাদির মধ্যেও উভয় ভাষার সাদৃশ্য দেখা যায়।[১]

আলেকজাণ্ডারের ভারত আক্রমণের পর থেকেই ভারতের সঙ্গে গ্রীসের প্রত্যক্ষ যোগাযোগ। কিন্তু তার আগে থেকেই ভারত সম্পর্কে গ্রীসের আগ্রহ ছিল। ওই

১ বাংলা ভাষাতত্ত্বের ভূমিকা—সুনীতিকুমার চট্টোপাধ্যায়, পৃ—96

সময় প্রধানত ব্যবসা-বাণিজ্যের মাধ্যমেই এই সংযোগ স্থাপিত হয়। নাবিকদের কাছ থেকে নানা বিবরণ পেয়ে ও অতি অল্প সংখ্যক ভ্রমণকারীর বিবরণ থেকে যে কাহিনী, বিবরণ ও তথ্য গ্রীসে পৌঁছেছিল, তা-ই ছিল গ্রীকদের ভারত সম্পর্কে জ্ঞান, ধারণা। কিন্তু ওইসব বিবরণ অধিকাংশই ছিল গল্প, রূপকথা, অপকাহিনী। তাই আলেকজাণ্ডারের আগের বেশীর ভাগ লেখায় নানা প্রমাদ ও হাস্যকর বিবরণ পাওয়া যায়। এমন কি, আলেকজাণ্ডারের পর প্রত্যক্ষ সংযোগ স্থাপিত হলেও গ্রীক লেখকরা যে-সব বিবরণ দিয়ে গেছেন, তার ঐতিহাসিকতা সম্বন্ধে যথেষ্ট সন্দেহ আছে, আর কিছু কিছু বিবরণ যে সভ্য মানুষের লেখার তথ্য হতে পারে, এ-কথা ভাবাই যায় না। যাই হোক, আলেকজাণ্ডারের মৃত্যুর পর ভারতের সিন্ধু, পাঞ্জাব ও আফগানিস্থানে গ্রীক অধিকার প্রতিষ্ঠিত হয় এবং এই ইন্দো-গ্রীক পর্ব স্থায়ী হয় 326 খ্রীস্টপূর্বাব্দ থেকে 400 খ্রীস্টাব্দ পর্যন্ত। এই সুদীর্ঘ কাল গ্রীক শাসনে ভারতের সংস্কৃতির সঙ্গে যে গ্রীক সংস্কৃতির মিলন ঘটবে এবং আদান-প্রদানের মাধ্যমে উভয় জাতি ক্রমশ সমৃদ্ধ ও ঐশ্বর্যশালী হবে, তাতে সন্দেহ নেই।

যে-সব গ্রীক-রোমান ঐতিহাসিক ও লেখক ভারত সম্পর্কে নানা বিবরণ ও তথ্যাদি পরিবেশন করেছেন, তাঁদের কয়েকজনের নাম উল্লেখ করা হলো: **হেরোডটাস** (**Herodotus, 490-80 B.C.**), **স্ট্রাবো** (**Strabo, *c*. 63 B.C.**) **অ্যারিয়ান** (**Arrian, *c*. 96 A.D**), **কুইণ্টাস** (**Quintus, 1st century A.D.**), **ডায়োডোরাস সিকুলাস** (**Diodorus Siculus, 1st century A.D.**), **জাস্টিন** (**Justin, 1st century B.C.**), **প্লুটার্ক** (**Plutarch, 46-120 A.D.**), **প্লিনি** (**Pliny, 23-79 A.D.**) প্রভৃতি। আর আছেন আমাদের অতি পরিচিত **মেগাস্থিনিস** (**Megasthenes, 300 B.C.**)।[২] এইসব ঐতিহাসিক ও লেখকরা ভারত সম্পর্কে নানা তথ্য দিয়েছেন; রাজনীতি, শাসনব্যবস্থা, সমাজব্যবস্থা, আচার-ব্যবহার, অনুষ্ঠান, শিক্ষা, দর্শন ইত্যাদি সম্পর্কে তাঁদের মন্তব্য কখনো সত্য বলে মনে হয়, আবার কখনো মিথ্যা, আজগুবি ও গল্প, কল্পকাহিনী বলে মনে হয়। তাই এঁদের দেওয়া তথ্য অবলম্বন করে ভারত ও গ্রীস এই দুই জাতির মধ্যে কে কাকে কতখানি প্রভাবিত করতে পেরেছিল, তার মূল্য ও পরিমাণ নির্ণয় করা দুঃসাধ্য বলেই মনে হয়। বিশেষত, প্রাচীন লেখকরা অনেকেই অনেককে বিশ্বাস করেন না। এমন কি, মেগাস্থিনিসের বিবরণ নিয়েও অনেক লেখক সন্দেহ প্রকাশ করেছেন।

ভারত সম্পর্কে প্রাচীন লেখকদের ভুল তথ্য পরিবেশন

ঐতিহাসিক হিসাবে হেরোডটাসের কথা না বললেও চলে। ইনি যে বিবরণ

২. বিস্তারিত বিবরণ রমেশচন্দ্র মজুমদার সম্পাদিত 'The Classical Accounts of India' দ্রষ্টব্য।

দিয়েছেন, তা অনেকাংশে ভুল ও ত্রুটিপূর্ণ। তিনি লিখেছেন, ভারতীয়রা কাঁচা মাছ খায়, মৃত আত্মীয়ের শব ভক্ষণ করে, আর তারা গরু-ছাগলের মত দিবালোকে যৌনসঙ্গম করে। এদেশের মরুভূমিতে খেকশিয়ালের মত বড় এক ধরনের পিপীলিকা বাস করে, এরা মাটির তলা থেকে সোনা স্তূপীকৃত করে। হেরোডটাসের ভাষায়,—**These ants forming their habitants under-ground, heap up the sand, as the ants in Greece do,···That sand that is heaped up is mixed with gold.**[৩] কেবল হেরোডটাসই নন, অধিকাংশ গ্রীক ও রোমান লেখক এই রকম বিবরণ দিয়েছেন।

মেগাস্থিনিসের বিবরণ বলে যা পরিচিত সেই *Indika*-র কোন অস্তিত্বই নেই। স্ট্রাবো, অ্যারিয়ান, প্লিনি প্রমুখের লেখা থেকে টুকরো টুকরো আকারে তা সংগ্রহ করা হয়েছে। এই বিবরণ সম্পর্কে গ্রীক লেখকরাই সন্দেহ প্রকাশ করেছেন। এই প্রসঙ্গে স্ট্রাবোর মন্তব্য ঃ **However, all who have written about India have proved themselves, for the most part, fabricators, but pre-eminently so Deimachus ; the next in the order is Megas-thenes.**[৪] সুকুমার রায় নাক-মুখ-চোখ নেই এমন সাপ আনার কথা বলেছেন। মেগাস্থিনিস এমন মানুষের উল্লেখ করেছেন যাদের মুখ নেই, চোখ নেই। তাঁর মতে পাণ্ডীয় (**Pandaian**) নারীরা ছ'বছর বয়সে সন্তান ধারণ করে, এবং এই রাজ্য কেবল নারীদের।

কোন গ্রীক লেখক সুরা-নদী ও মধু-নদীর কথা বলেছেন। এইসব নদী দিয়ে কেবল সুরার স্রোত চলছে, আর মধুর স্রোত চলছে। সুরাপানে মত্ত রাজাকে কোন রমণী হত্যা করলে তাকে পুরস্কৃত করা হতো ; স্বামীরা সতীত্বের প্রতি নজর না দিলে নারীরা বেশ্যাবৃত্তি করতে পারত। এ রকম অসংখ্য উদ্ভট ও আজগুবি কথায় গ্রীক লেখকরা সময় ও শক্তি ব্যয় করেছেন।

গ্রীকদের বৈজ্ঞানিক মনোভাবাপন্ন ও সত্যসন্ধী বলে উচ্ছ্বসিত প্রশংসা করা হয়। কিন্তু তাঁদের ভারত সম্পর্কিত লেখায় তার প্রতিফলন দেখা যায় না। মনে হয়, যেন তাঁরা পুরাণ-উপাখ্যানেই বেশী বিশ্বাসী, আর কল্পনাতেও কল্পবিজ্ঞান ও অপবিজ্ঞান লেখকদের ছাড়িয়ে যান। যেমন, আলেকজাণ্ডারের ভারত আক্রমণ অতি বাস্তব ঘটনা এবং পুরুর সাথে যুদ্ধও তাই। কিন্তু আলেকজাণ্ডারের ঝিলাম নদী অতিক্রম করা এবং পুরুর নানা বিভাগের সৈন্য সংখ্যায় গ্রীক লেখকদের মধ্যে মিল নেই। যে যার খুশীমত সংখ্যার উল্লেখ করেছেন। আলেকজাণ্ডারের প্রিয় ঘোড়া **বুকেফ্যালাস**-এর (**Bucephalus**) মৃত্যু নিয়েও সবাই এক মত নন। কেউ বলেন, পুরুর সঙ্গে যুদ্ধে ঘোড়াটির মৃত্যু হয়েছিল, আবার কেউ বলেন, ঘোড়াটির স্বাভাবিক মৃত্যু হয়েছিল। তা ছাড়া লেখকরা বহু স্থানে স্ববিরোধিতায়

৩. The Classical Accounts of India—edited by R.C. Mazumdar, Page--3

৪. Ibid, Page--465

নিমগ্ন হয়েছেন। তাই গ্রীক লেখকদের তথ্য ও বিবরণ সম্পর্কে ডঃ রমেশচন্দ্র মজুমদার বলেন,—"**The natural inference is that the classical writers did not make a very careful and critical study of the sources available to them, and their standard of histriography was not very high**".[৫]

এতক্ষণ আমরা গ্রীক লেখকদের বিবরণ, তথ্য ইত্যাদি নিয়ে যে-সব মন্তব্য করলাম, তা যে অস্বীকার করা যায় না বোধ করি অনেকেই মানবেন। কিন্তু এইসব লেখকদের লেখা যত ত্রুটিপূর্ণই হোক, একটি বিষয় স্পষ্ট হচ্ছে যে, অতি প্রাচীনকাল থেকেই ভারত ও গ্রীসের মধ্যে একটা সংযোগ সূত্র ছিল এবং তা কখনো বা ব্যবসা-বাণিজ্যের মাধ্যমে, আর কখনো বা সাম্রাজ্য প্রতিষ্ঠার মাধ্যমে। বোধ করি খ্রীস্টপূর্ব সপ্তম-ষষ্ঠ শতাব্দী থেকেই পূর্ব-পশ্চিমে এই সংযোগ প্রতিষ্ঠিত হতে শুরু করে থাকবে,—হ্যাভেল অন্তত এরকম মনে করেন। পরে জ্যোতির্বিজ্ঞানের আলোচনা প্রসঙ্গে আমরা আরো কিছু প্রামাণিক তথ্য পরিবেশন করার প্রয়াস পাব।

২
জ্ঞান-বিজ্ঞানে ভারত-গ্রীস

ভারত ও গ্রীস—প্রাচীন সভ্য এই দুইটি জাতির বিশ্বসভ্যতা ও সংস্কৃতিতে অসামান্য অবদানের কথা পণ্ডিতরা এক বাক্যে স্বীকার করেন। এই দুইটি দেশের মানুষ কেবল খেয়েপরে বেঁচে থাকাই জীবন বলে মেনে নিতে পারেনি, বাস্তব জীবনের ঊর্ধ্বে উচ্চতর জীবন, ঐহিকের ওপরে আরো কিছু জানার অন্বেষায় নিজেদের নিয়োজিত করেছিল। তাই উভয় দেশে জ্ঞান-বিজ্ঞানের ক্ষেত্রে বিশেষ উন্নতি দেখতে পাওয়া যায়। অবশ্য ভারত ও গ্রীসের তত্ত্ব ও তথ্যানুসন্ধানে, এবং মনস্বীদের মানসিকতা ও প্রবণতায় কিছু কিছু প্রভেদ দেখা যায়।

ইউরোপীয় পণ্ডিতরা গ্রীসের '**যুক্তিমূলক মনোবৃত্তি**'-র (**rational attitude of mind**) উচ্চতম প্রশংসা করেন এবং এটাই নাকি বিজ্ঞানের যে-কোন তথ্য আবিষ্কারের চেয়ে শ্রেষ্ঠ অবদান। কিন্তু ভারতের সঙ্গে তুলনা করার সময় তাঁরা "প্রচলিত সংস্কার ও অন্ধবিশ্বাসের ওপর নির্ভরতা, অলৌকিক কাহিনী ও যুক্তিহীন ধর্মমতের প্রভাব, উদ্ভট কল্পনা দ্বারা প্রাকৃতিক স্বরূপ নির্ণয় প্রভৃতির" অবতারণা করেন। বস্তুতপক্ষে, এখানে ভারতের যে-সব দোষত্রুটির উল্লেখ করা হয়েছে, তা মিথ্যা নয়। কিন্তু আমাদের প্রশ্ন : গ্রীস কি এরকম দোষে দোষী নয়? গ্রীসের জনসাধারণ কি সবাই যুক্তিবাদী ছিল? ওই দেশে কি এলিউসিনিয়ান ও অর্ফিক উৎসব ছিল না? পেলোপনেশিয়ান যুদ্ধে পরাজয়ের অন্যতম কারণ কি চন্দ্রগ্রহণ ছিল না? গ্রীসের নাগরিকরা কি **অ্যানাক্সাগোরাস**, **প্রোটাগোরাস** ও **সক্রেটিস**-এর যুক্তি, বৈজ্ঞানিক মানসিকতা সহ্য করতে পেরেছিল? আসলে পাশ্চাত্য পণ্ডিতরা

---

৫. The Classical Accounts of India—R.C. Mazumder, Page—xxiii

ভারত ইতিহাসের কঙ্কালটুকুই দেখেছেন, তার আত্মা ও প্রাণের স্পর্শ পাননি। এ-বিষয়ে রবীন্দ্রনাথ তাঁর 'ভারতবর্ষের ইতিহাস' প্রবন্ধে অনির্বচনীয় ভাষায় বলেন,—"ঝড়ের দিনে যে ঝড়ই প্রধান ঘটনা, তাহার গর্জন সত্ত্বেও স্বীকার করা যায় না ; সে দিনও সেই ধূলিসমাচ্ছন্ন আকাশের মধ্যে পল্লীর গৃহে গৃহে যে জন্মমৃত্যু সুখদুঃখের প্রবাহ চলিতে থাকে, তাহা ঢাকা পড়িলেও মানুষের পক্ষে তাহাই প্রধান। কিন্তু বিদেশী পথিকের কাছে এই ঝড়টাই প্রধান, এই ধূলিজালই তাহার চক্ষে আর সমস্ত গ্রাস করে ; কারণ, সে ঘরের ভিতরে নাই, সে ঘরের বাহিরে। সেইজন্য বিদেশীর ইতিহাসে এই ধূলির কথা, ঝড়ের কথাই পাই ; ঘরের কথা কিছুমাত্র পাই না।"[৬]

দৃশ্যমান জগতের গূঢ় রহস্য উন্মোচনের তীব্র আকূতি এবং সম্পূর্ণ নিরাসক্ত ও সংস্কারমুক্ত মন নিয়ে যুক্তির দ্বারা সেই রহস্যের অবগুণ্ঠন খুলতে প্রয়াস পাওয়াই প্রকৃত বৈজ্ঞানিক মনোবৃত্তির পরিচয়। থ্যালেস থেকে শুরু করে গ্রীসের বহু দার্শনিক, বিজ্ঞানী ও গণিতজ্ঞ এইরূপ মনোভাব পোষণ করতেন, এ-বিষয়ে ইতি-পূর্বেই আলোচনা করা হয়েছে। প্রাচীনকাল থেকেই ভারতের ঋষি, মনস্বীরা এইরূপ বৈজ্ঞানিক মানসিকতা লাভ করেছিলেন।* প্রাচীনতম গ্রন্থ ঋগ্বেদের সৃষ্টি-তত্ত্বের মধ্যে এর বিস্তারিত পরিচয় পাওয়া যায়। একটু দীর্ঘ হলেও এখানে মূল শ্লোক ও তার অনুবাদ উদ্ধৃত হলো ঃ

নাসদাসীন্নো সদাসদীত্তদানীং নাসীদ্রজো নো ব্যোমা পরো যৎ।
কিমাবরীবঃ কুহ কস্য শর্মন্নম্ভঃ কিমাসীদগহনং গভীরম্ ॥ ১
ন মৃত্যুরাসীদমৃতং ন তর্হি ন রাত্র্যা অহ্ন আসীৎ প্রকেতঃ।
আনীদবাতং স্বধয়া তদেকং তস্মাদ্ধান্যন্ন পরঃ কিং চনাস ॥ ২
তম আসীত্তমসা গূঢ়হ্মগ্রেঽপ্রকেতং সলিলং সর্বমা ইদম্।
তুচ্ছ্যেনাভ্বপিহিতং যদাসীত্তপসস্তন্মহিনাজায়তৈকম্ ॥ ৩
কামস্তদগ্রে সমবর্ততাধি মনসো রেতঃ প্রথমং যদাসীৎ।
সতো বন্ধুমসতি নিরবিন্দন্ হৃদি প্রতীষ্যা কবয়ো মনীষা ॥ ৪
তিরশ্চীনো বিততো রশ্মিরেষামধঃ স্বিদাসীদুপরি স্বিদাসীৎ।
রেতোধা আসন্মহিমান আসন্ত্ স্বধা অবস্তাৎ প্রযতি পরস্তাৎ ॥ ৫
কো অদ্ধা বেদ ক ইহ প্র বোচৎকুত আজাতা কুত ইয়ং বিসৃষ্টিঃ।
অর্বাগ্দেবা অস্য বিসর্জনেনাথা কো বেদ যত আবভূব ॥ ৬
ইয়ং বিসৃষ্টির্যত আবভূব যদি বা দধে যদি বা ন।
যো অস্যাধ্যক্ষঃ পরমে ব্যোমন্ত্ সো অঙ্গ বেদ যদি বা ন বেদ ॥ ৭

৬. বিচিত্রা—পৃ.—203

* কিন্তু অবক্ষয় ও অধঃপতনের অন্যতম কারণ ব্রাহ্মণ্য-পুরাণ-শাসিত সমাজে ধর্মীয় রহস্য ও ইন্দ্রজালের অনুপ্রবেশ ও আপ্তবাক্যে সুদৃঢ় বিশ্বাস।

অনুবাদ ঃ "(১) সেকালে যা নেই তাও ছিল না, যা আছে তাও ছিল না। পৃথিবীও ছিল না, অতি দূরবিস্তার আকাশও ছিল না। আবরণ করে এমন কি ছিল? কোথায় কার স্থান ছিল? দুর্গম ও গম্ভীর জল কি তখন ছিল? (২) তখন মৃত্যুও ছিল না, অমরত্বও ছিল না, রাত্রি ও দিনের প্রভেদ ছিল না। কেবল সে একমাত্র বস্তু বায়ুর সহকারিতা ব্যতিরেকে আত্মা মাত্র অবলম্বনে নিশ্বাস-প্রশ্বাস-যুক্ত হয়ে জীবিত ছিলেন। তিনি ব্যতীত আর কিছু ছিল না। (৩) সর্বপ্রথমে অন্ধকারের দ্বারা অন্ধকার আবৃত ছিল। সমস্তই চিহ্নবর্জিত ও চতুর্দিকে জলময় ছিল। অবিদ্যমান বস্তু দ্বারা সে সর্বব্যাপী আচ্ছন্ন ছিলেন। তপস্যার প্রভাবে সে এক বস্তু জন্মিলেন। (৪) সর্বপ্রথমে মনের উপর কামের আবির্ভাব হল, তা হতে সর্বপ্রথম উৎপত্তির কারণ নির্গত হল। বুদ্ধিমানগণ বুদ্ধি দ্বারা আপন হৃদয়ে পর্যালোচনাপূর্বক অবিদ্যমান বস্তুতে বিদ্যমান বস্তুর উৎপত্তি স্থান নিরূপণ করলেন। (৫) রেতোধা পুরুষেরা উদ্ভব হলেন, মহিমা সকল উদ্ভব হলেন। ওদের রশ্মি দু পার্শ্বে ও নিম্নের দিকে এবং ঊর্ধ দিকে বিস্তারিত হল, নিম্ন দিকে স্বধা রইল, প্রয়তি ঊর্ধ দিকে রইলেন। (৬) কেই বা প্রকৃত জানে? কেই বা বর্ণনা করবে? কোথা হতে জন্মিল? কোথা হতে এ সকল নানা সৃষ্টি হল? দেবতারা এ সমস্ত নানা সৃষ্টির পর হয়েছেন। কোথা হতে যে হল, তা কেই বা জানে? (৭) এ নানা সৃষ্টি যে কোথা হতে হল, কার থেকে হল, কেউ সৃষ্টি করেছেন, কি করেননি, তা তিনিই জানেন, যিনি এর প্রভুস্বরূপ পরমধামে আছেন। অথবা তিনিও না জানতে পারেন।"[৭]

আমাদের আলোচ্য এই সূক্তে যথেষ্ট পরিমাণ সাঙ্কেতিকতা আছে। এবং তা দীর্ঘদিন ধরে লিখিত রূপের মধ্যে না থাকায় এখন এর প্রকৃত অর্থ ও তাৎপর্য নির্ণয় খুবই দুরূহ। তবুও অনুবাদে যতটুকু অর্থ বোধগম্য হয়, তাতে মনে হয় ঋগ্বেদের যুগের ঋষিরা যেমন অধ্যাত্মভাবনাসম্পন্ন ছিলেন, তেমনি অন্য দিকে চরম সত্য বা সত্তার অন্বেষণে তাঁদের প্রয়াস অব্যাহত ছিল। এইখানেই গ্রীক দার্শনিকদের সঙ্গে তাঁদের পার্থক্য। রবীন্দ্রনাথের ভাষায় বলতে গেলে **"ভারতবর্ষের সত্য হচ্ছে জ্ঞানে অদ্বৈততত্ত্ব, ভাবে বিশ্বমৈত্রী এবং কর্মে যোগসাধনা।"**[৮]

গ্রীকদের মতে জগতের উৎপত্তি কি করে হলো, এই সমস্যাই বড় নয়; জগৎ সম্বন্ধে বিশেষ জ্ঞান লাভ করাই বড় কথা। এইটি হচ্ছে বৈজ্ঞানিক পথ এবং এভাবেই বিজ্ঞান নানা সৃষ্টি করে। দৃশ্যমান জগতের অভিনিবেশসহকারে **পর্যবেক্ষণ** করে উপাদানগুলির পরীক্ষামূলক বিশ্লেষণ করাই প্রকৃত বৈজ্ঞানিক পদ্ধতি। বলা বাহুল্য, এখনো বিজ্ঞানে এই ধারণাই চলে আসছে। এই পদ্ধতির মূল কথা—"বিশ্বজগতে যাহা আছে এবং ঘটিতেছে পুঙ্খানুপুঙ্খরূপে পর্যবেক্ষণ

৭. ঋগ্বেদ-সংহিতা (দ্বিতীয় খণ্ড)—(হরফ প্রকাশনী), পৃ—624 (১০, ১২৯, ১-৭)
৮. তপোবন—সাধনা, পৌষ, ১৩১৬

দ্বারা তাহার প্রকৃতস্বরূপ নির্ধারণ করিয়া তাহার রীতিমত শ্রেণীবিভাগ বিশ্লেষণ (analysis) ও সংশ্লেষণ (synthesis) ; তাহার সাহায্যে ও ব্যাখ্যাকল্পে সাধারণতত্ত্ব (general principles) উদ্ভাবনের প্রচেষ্টা ; এবং এইসব তত্ত্বের সহিত পূর্বে জ্ঞাত ও স্বীকৃত তত্ত্বের সমন্বয় ও সামঞ্জস্য বিধান।”[৯]

যে বৈজ্ঞানিক পদ্ধতি আবিষ্কারের জন্য গ্রীসের এত নাম ও খ্যাতি, অনুরূপ পদ্ধতি প্রাচীন ভারতেও দেখা যায়। শুধু তাই নয়, এই পদ্ধতির বিভিন্ন পর্যায় নিয়ে তাঁরা সুষ্ঠু আলোচনাও করেছেন। মনীষী আচার্য ব্রজেন্দ্রনাথ শীল এই পর্যায়গুলি বিশ্লেষণ করেছেনঃ **প্রত্যক্ষীকরণ** (Perception), **পর্যবেক্ষণ** (Observation), **পরীক্ষা** (Experiment), **পর্যবেক্ষণের হেত্বাভাস** (Fallacy of Observation), **অনুমিতি** (Inference) এবং প্রকল্প (Hypothesis)। আচার্য শীল বলেন, প্রাচীন ভারতীয়রা যে কেবল এগুলি জানতেন তাই নয়, এর প্রত্যেকটি সন্তোষজনক ভাবে গ্রহণ করার আগে কি কি নিয়ম-বিধি মানতে হবে, তার নির্দেশও তাঁরা দিয়েছেন।*

চিকিৎসা-বিজ্ঞানে ভারত-গ্রীস

বিজ্ঞানের যে-সব শাখায় কমবেশী গ্রীক প্রভাব আছে বলে অনুমান করা হয়, তা হচ্ছে জ্যোতির্বিজ্ঞান, গণিত ও চিকিৎসাবিদ্যা। প্রথম দুটি বিষয় সম্বন্ধে আমরা পরবর্তী পরিশিষ্টে আলোচনা করব। এখানে চিকিৎসাবিদ্যায় ভারতের কৃতিত্ব এবং গ্রীক প্রভাব সম্বন্ধে একটি রূপরেখা দেওয়ার চেষ্টা করা যাক। বলা বাহুল্য, এই তিনটি পরিশিষ্টে আমরা যে-সব বিষয় নিয়ে আলোচনা করছি, তা আরো বিস্তারিতভাবে করার অপেক্ষা রাখে, এবং প্রত্যেকটি পরিশিষ্ট অবলম্বনে পৃথক পৃথক গ্রন্থ রচনা করা যায়। কিন্তু এই গ্রন্থে সে সুযোগ নেই ; গ্রীক গণিতের গৌরবময় অবদান পাঠ করার পর যাতে আমাদের দেশের সাধারণ পাঠক স্বদেশের কৃতিত্ব সম্বন্ধে দু-চার কথা জানতে পারেন, সেইজন্যই এই পরিশিষ্টত্রয়ের পরিকল্পনা।

প্রাচীন ভারতে জ্যোতির্বিজ্ঞান ও গণিতে যে উন্নতি ও সমৃদ্ধি দেখা যায়, চিকিৎসাবিদ্যা তথা আয়ুর্বেদে তেমনটি নয়। বস্তুত, ওই দুটি বিষয়ের পর চিকিৎসাবিদ্যার স্থান। বহু যুগ ধরে বেদ অপৌরুষেয় ও আপ্তবাক্য বলে গৃহীত হয়ে এসেছে।** আয়ুর্বেদের বিধান, নিয়ম-পদ্ধতি ইত্যাদিও মানুষ সত্য বলে মনে করে এসেছে। অথর্ববেদের নানা স্থানে ভেষজ, শল্য ও স্বাস্থ্যবিদ্যা সম্বন্ধে আলোচনা দেখা যায়। চরক সংহিতার একটি উক্তি বিশেষভাবে লক্ষণীয়ঃ

---

৯. প্রাচীন ভারতে বিজ্ঞানচর্চা—রমেশচন্দ্র মজুমদার, পৃ—9

* বিস্তারিত বিবরণ—B. N. Seal-এর On the Scientific Method দ্রষ্টব্য।

** প্রাচীন ভারতে একমাত্র ব্যতিক্রম চার্বাক।

"বেদ আপ্তাগম, কিন্তু পর্যবেক্ষণ ও প্রক্রিয়া (experiment) দ্বারা নির্ণীত যে সমুদয় সিদ্ধান্ত পণ্ডিতেরা পরীক্ষান্তে নির্ভুল বলিয়া গ্রহণ করিয়াছেন তাহাও আপ্তাগমের তুল্য।"

প্রাচীন ভারতের দুই মহান চিকিৎসাবিদ জীবক ও চরক। জীবকের বৃক্ষ, লতা, গুল্মে ভেষজ ধর্ম আবিষ্কার তো কিংবদন্তীতে পরিণত হয়েছে। রোগের বিবরণ সংগ্রহের প্রয়োজনীয়তার জন্য যদি হিপোক্রেটিসের সাফল্য ও গৌরব বৃদ্ধি পায়, তা হলে জীবকের নাম সর্বাগ্রে করতে হয়। গ্রীকরা যদি আধিদৈবিক বা আধিভৌতিক কারণে রোগের উৎপত্তি হয় না বলে চিকিৎসা-বিজ্ঞানে যুগান্তর এনে থাকে, তা হলে জীবককেও এই কৃতিত্ব দান করতে হবে। তিনি প্রাকৃতিক ঘটনার সাহায্যেই রোগের কারণ নির্ণয় করতেন। শল্য শাস্ত্রে জীবক বিশেষ পারদর্শী ছিলেন। চীবর বস্তুতে নানা অস্ত্রোপচারের কাহিনী বর্ণিত আছে।

জীবকের গুরু ছিলেন আত্রেয়। তিনি বলতেন, উত্তম খাদ্যদ্রব্যই মানুষের সুখের মূলে, আর ক্ষতিকর খাদ্য অসুখের বা রোগের মূলে। হিপোক্রেটিস একই রকম দৃষ্টিভঙ্গী পোষণ করতেন। তাঁর একটি গ্রন্থে এরকম লেখা আছে যে, রোগের উৎপত্তি হয় খাদ্য গ্রহণের মাধ্যমে অথবা বায়ুর মাধ্যমে। মহামারীরূপে যে রোগ দেখা দেয় তা বায়ুর মাধ্যমেই ঘটে। হঠাৎ খাদ্যাভ্যাস পরিবর্তন বিপদজনক হতে পারে বলে এড়িয়ে চলা উচিত। গ্রীক ও ভারতীয় চিকিৎসা-বিজ্ঞানীদের এরূপ দৃষ্টিভঙ্গী যদি ভাবের আদান-প্রদানের মধ্য দিয়ে বা আলোচনার মধ্য দিয়ে গড়ে উঠে থাকে, তার মধ্যে নিন্দনীয় কিছু আছে বলে মনে হয় না। কোন দেশ উদ্ভাবন বা আবিষ্কারে প্রথম তা নিয়ে বিতর্কের চেয়ে সভ্যতা ও সংস্কৃতিতে কোন দেশের কতটা অবদান, এ-বিচার বিশ্লেষণ আরো বাঞ্ছনীয় ও অভিপ্রেত বলে মনে হয়। এই প্রসঙ্গে আচার্য জগদীশচন্দ্রের একটি মন্তব্য স্মরণযোগ্য ঃ **Nothing can be more vulgar or more untrue than the ignorant assertion that the World owes its progress of knowledge to any particular race. The whole World is independent, and a constant stream of thought has throughout ages enriched the common heritage of mankind.***

জীবকের পর চরক ও সুশ্রুত। চরক কনিষ্কের সভায় ছিলেন, সুশ্রুত খুব সম্ভব তৃতীয়-চতুর্থ শতাব্দীতে বর্তমান ছিলেন। শুধু ভারতে নয়, খ্রীস্টীয় প্রথম শতাব্দীর মধ্যেই মধ্য এশিয়ায় আয়ুর্বেদ শাস্ত্রের প্রসিদ্ধি ছড়িয়ে পড়ে। অতি সম্প্রতি জানা গেল, সুশ্রুত সংহিতায় আকুপাংচারের পদ্ধতি প্রথম আবিষ্কৃত হয়।[১০]

আলেকজাণ্ডারের ভারত আক্রমণের সময় এ দেশের চিকিৎসা বিজ্ঞান উন্নত

* বসু বিজ্ঞান মন্দিরের অষ্টম বর্ষের সভায় প্রদত্ত ভাষণ থেকে

১০. সুশ্রুতে আকুপাংচার—অসীমা চট্টোপাধ্যায়, আনন্দবাজার পত্রিকা, 12. 6. 83

স্তরে পৌঁছেছিল। সাপে কাটার ওষুধ গ্রীকদের জানা ছিল না ; ভারতীয়দের কাছ থেকে তারা এটি শেখে। চন্দ্রগুপ্ত সেলুকসের নিকট অনেক ওষুধপত্র পাঠান। ভারত-গ্রীক সংস্কৃতির আলোচনায় নলিনী এম. চাপেকার বলেন,— "**Dioskorides (*Ist* century A. D.) in his *Herbal* specifically states that the following plants were brought from India for medical purposes :** *Kardamomum* (1. 5), *Nardos* (1. 6), *Malabathrum* (1. 11), *Kostos* (1. 15), *Calamus Aromaticus* (1. 17), etc."[১১] তা ছাড়াও ডায়োস্কোরাইডস ও অন্য গ্রীক লেখকরা পিপ্পল, আদা, এলাচ, গ্গুগ্গুল, শর্করা, তিল ইত্যাদি তাঁদের গ্রন্থে অন্তর্ভুক্ত করেছেন। নলিনী এম. চাপেকার এ-বিষয়ে মন্তব্য করেছেন যে, এইসব থেকে এই ইঙ্গিত পাওয়া যায় গ্রীকরা ভারতীয়দের কাছ থেকে বহুবিধ ভেষজ শিখেছিল।[১২]

চিকিৎসাবিদ্যায় গ্রীকদের কৃতিত্ব অবশ্যই স্বীকার্য। ভারত-গ্রীক সম্পর্ক ও যোগাযোগ প্রতিষ্ঠিত হওয়ার পর উভয় দেশের বিজ্ঞানীরা পরস্পর আদান-প্রদানের ভিত্তিতে এই শাস্ত্রের উন্নতি করেছিলেন। তাই চরক ব্যাকটিরিয়ার বল্‌কের অধিবেশনে উপস্থিত হয়ে সেখানকার চিকিৎসা-বিজ্ঞানীদের মতামত গ্রহণে দ্বিধাবোধ করেননি।[১৩]

৩

জ্যোতির্বিজ্ঞানে ভারত-গ্রীস

খ্রীস্টপূর্ব চতুর্থ শতাব্দীতে গ্রীকদের ভারতে আগমন, এবং তারপর থেকে যখন এদেশে গ্রীকসাম্রাজ্য প্রতিষ্ঠিত হলো, গ্রীকরা এদেশের জ্ঞান-বিজ্ঞানের সঙ্গে পরিচিত হতে ও ঘনিষ্ঠ হতে থাকল, তখন থেকে উভয় দেশের মধ্যে সাংস্কৃতিক আদান-প্রদান ঘটতে থাকে। বলা বাহুল্য, এই আদান-প্রদানের মনোভাব একদিনে গড়ে ওঠেনি। তা হতে দীর্ঘদিন সময় নিয়েছে। ঠিক কোন সময় থেকে এই আদান-প্রদান শুরু হলো, উভয় দেশের পণ্ডিতরা পরস্পরের মধ্যে ভাব বিনিময় শুরু করে প্রভাবিত হতে থাকলেন, এক দেশের উৎকৃষ্ট প্রত্যয়-প্রতীতি, পদ্ধতি ইত্যাদি গ্রহণ করে নিজেদের অপেক্ষাকৃত নিকৃষ্টতর পদ্ধতি বর্জন করলেন, তা আজ নির্ণয় করা অসম্ভব বললেই চলে। ভারত-গ্রীসের মধ্যে ভাব বিনিময় ও আদান-প্রদান সম্বন্ধে নানা তর্ক-বিতর্ক আছে। একদল পণ্ডিত মনে করেন, ভারত গ্রীসের কাছে ঋণী, আর একদল পণ্ডিত মনে করেন গ্রীস ভারতের নিকট ঋণী। সত্যি কথা বলতে কি, এই উভয় দলের পণ্ডিতদের মধ্যে যে যুক্তি ও প্রমাণাদি আছে, তা সর্বত্র স্পষ্ট ও প্রামাণিক নয়,—কিছুটা অনুমান সাপেক্ষ।

---

১১. Ancient India and Greece—Nalinee M. Chapekar, Page—42-43

১২. Ibid, Page—43

১৩. Foreign Influence in Ancient India—Jariazbhoy, Page—79

আবার এই দুই দলের মধ্যে এমন সব সমালোচক আছেন যাঁরা কোমর বেঁধে ভারতের কৃতিত্ব ও সাফল্য ম্লান করে দিতে চান ; তাঁরা যেখানেই ভারতের সঙ্গে গ্রীসের ভাব ও ভাবনার সাদৃশ্য দেখেন, সেইখানেই গ্রীক প্রভাবের কথা বলেন। কিন্তু একটি ভাব-ভাবনার সাদৃশ্য দেখলেই যে তা সব সময় একে অপরের দ্বারা প্রভাবিত হবেন, এমন কথা বলা যায় না। এ-সম্পর্কে আচার্য রমেশচন্দ্র মজুমদারের মতটি স্মরণ করা যেতে পারে ঃ "ভিন্ন ভিন্ন জাতির মধ্যে ভাবের ও চিন্তার আদন-প্রদান আবহমান কাল হইতে প্রচলিত। কিন্তু ইহার স্বরূপ নির্ণয় করা কঠিন। কোনো দুই দেশে কোনো বিষয়ে সাদৃশ্য দেখিলেই তাহা ভাব বিনিময়ের ফল মাত্র একথা সিদ্ধান্ত করা চলে না। কারণ অনুরূপ পরিবেশের ফলে বিভিন্ন দেশে স্বতন্ত্রভাবে একই প্রকারের চিন্তা ও আবিষ্কার সম্ভব হইয়াছে ইহা অনায়াসেই অনুমান করা যাইতে পারে।"[১৪] কিন্তু জি. আর. ক্যে, ভেবর (Weber), হুইটনি (Whitney) প্রমুখ পণ্ডিতরা একথা মানতে রাজী নন। ক্যে সাহেব তো বলেন, "**Soon after the beginning of Christian era the traditional astronomical system in India was largely discarded, and the system in vogue in the Greek schools was imported and assimilated.**"[১৫] ক্যে সাহেবের কথাটি সর্বাংশে সত্য নয়। বরং তাঁর এরূপ বলা উচিত ছিল ভারতীয় জ্যোতির্বিজ্ঞান গ্রীকদের দ্বারা প্রভাবিত হতে থাকে। এবং উভয় পদ্ধতি সমান্তরালভাবে প্রচলিত ছিল। তারপর আর্যভট-ব্রহ্মগুপ্ত-ভাস্কর প্রমুখ প্রতিভাশালী জ্যোতির্বিদ ও গণিতজ্ঞদের আবির্ভাবে এই শাখা এক নবতর রূপ পরিগ্রহ করে।

সংস্কৃত ভাষায় রচিত জ্যোতির্বিজ্ঞান গ্রন্থাদির পরিমাণ বিপুল। বিশ্বে এর তুলনা কম। তবে মৌলিক গ্রন্থের সংখ্যা কম—টীকা-ভাষ্য বহু। কিন্তু এই তথ্যই প্রমাণ করে ভারতে বিজ্ঞানের এই শাখার চর্চা বিশেষ মর্যাদার সহিত হতো। ভারতীয় নক্ষত্রের তালিকা যজুর্বেদীয় তৈত্তরীয়, মৈত্রায়ণী সংহিতা, কাথক, অথর্ববেদ ইত্যাদিতে দেখা যায়। অবশ্য গ্রহদের অবস্থান নির্ণয়ে নক্ষত্রের ভূমিকা কেবল ভারতেই দেখা যায়নি,—চৈনিক, কোপটিক, ইসলামী জ্যোতির্বিজ্ঞানেও দেখা যায়। কিন্তু মিশর ও ইসলামী নক্ষত্রের তালিকা ভারতের মত অত প্রাচীন নয়। ফিলোজোট (**Filliozat**)-এর মতে এই পদ্ধতি পারস্যের মধ্য দিয়ে মিশর ও আরবে প্রবেশ করে। প্রাচীন চীনেও এই পদ্ধতি দেখা যায়। কিন্তু 'সিউ' (**sieou**) পদ্ধতি কত প্রাচীন নির্ণয় করা দুঃসাধ্য। চীনারা ভারতীয়দের কাছ থেকে প্রেরণা পেয়ে এই পদ্ধতি প্রচলিত করেছিল কিনা কিছু বলা যায় না। কিন্তু প্রাচীনকালে ভারত-চীনে এই পদ্ধতির প্রচলন ছিল, সন্দেহ নেই। পণ্ডিতরা এই

---

১৪. প্রাচীন ভারতে বিজ্ঞানচর্চা—রমেশচন্দ্র মজুমদার, পৃ—৪৯

১৫. Astronomical Observation of Jai Singh—G. R. Kaye, Page – 70

পদ্ধতি কোন দেশে প্রথম উদ্ভাবিত হয়েছিল তা সঠিক নির্ণয় করতে না পেরে তৃতীয় একটি দেশের অবতারণা করেছেন যেখান থেকে ভারত ও চীন উভয় দেশ এই পদ্ধতি গ্রহণ করেছিল। সেই দেশটি মেসোপটেমিয়া। কিন্তু দুর্ভাগ্যের বিষয়, সে-দেশে এমন কোন তথ্য আজ পর্যন্ত আবিষ্কৃত হয়নি যা দিয়ে পণ্ডিতরা ভারত বা চীনের কৃতিত্ব ম্লান করতে পারেন।*

ভারতীয় জ্যোতির্বিজ্ঞানে গ্রীক প্রেরণা ও প্রভাব অস্বীকার করার হেতু নেই। আলেকজাণ্ডারের ভারত আক্রমণের অন্তত দু-শ' বছর আগে থেকেই এ দেশের সঙ্গে গ্রীক ও ব্যাবিলনীয়দের যোগাযোগ ছিল। খ্রীস্টপূর্ব ষষ্ঠ-পঞ্চম শতাব্দীতে পারস্য সম্রাট সিন্ধু ও গ্রীক ভূখণ্ডে সাম্রাজ্য বিস্তার করেন। এই সময় গ্রীক স্কাইল্যাক্স (**Skylax**) কাশ্যপপুর—আধুনিক মূলতানে প্রেরিত হন বলে জানা যায়। তা ছাড়া সেলুকাস ও পরবর্তী সম্রাটদের সময় ব্যাবিলনের সঙ্গেও ভারতের সংযোগ স্থাপিত হয়। প্রায় দু-শ' বছর পারসিক শাসন ও পরবর্তী গ্রীক আমলে ভারতের সঙ্গে গ্রীস-ব্যাবিলন ইত্যাদির সাংস্কৃতিক আদান-প্রদান হয়ে থাকবে, এবং সেটাই স্বাভাবিক। কিন্তু পাশ্চাত্য পণ্ডিতরা এক তরফা গ্রীক প্রভাবের কথাই বলেন, ভারতীয় ঋণ ও প্রভাবের কথাটি অস্বীকার করেন। এই ঐতিহাসিক অপলাপ দুর্ভাগ্যজনক। যাই হোক, আমরা উভয় দেশের ভাবের ও সংস্কৃতির আদান-প্রদানের দিকটি সামান্য আলোচনা করি। অবশ্য আমাদের আলোচনায় বর্তমানে জ্যোতির্বিজ্ঞান বিবেচিত হবে।

হেরাক্লিটাস (**Heraklitus**) 10,800 বছরে এক **Great Year**-এর অবতারণা করেছেন। এই সময়ে জ্যোতিষ্করা অখণ্ডসংখ্যকবার আবর্তন করে তাদের শুরু করার জায়গায় ফিরে আসে। ব্যাবিলনীয় জ্যোতির্বিদ বেরোসোস (**Berossos**) 432,000 বছরে ব্যাবিলনীয় মহাযুগের অবতারণা করেছেন। অনেকের জানা, প্রাচীন ভারতে '**সম্বৎসর**' 10,800 মুহূর্তে বিভাজিত। আবার আমাদের জানা ঋগ্বেদে মোট 432,000 সিল্যাব্‌ল (**Syllables**) আছে। তা ছাড়া ভারতীয় জ্যোতির্বিজ্ঞানে সময় বিভাজনের যে কল্পনা আছে, তাতে কলিযুগের পরমায়ু 432,000 বছর। এ থেকেই আবার মহাযুগ পাওয়া যায় 4,320,000 বছর। এইসব সংখ্যায় তিনটি দেশের মধ্যে সাদৃশ্য থাকায় মনে হয় গ্রীক-ব্যাবিলন-ভারতের মধ্যে বেশ ভাল রকম ভাব ও সংস্কৃতির আদান-প্রদান ছিল। কিন্তু কোন দেশে এসব সংখ্যার প্রথম আবির্ভাব সম্ভব সে-প্রসঙ্গে বিচার-বিবেচনা করলে সময়ের নিরিখে ভারতের কথাই প্রাধান্য পায়। কারণ, বৈদিক যুগে বছরে দিনের সংখ্যা ছিল 360 এবং এক দিনে 30 মুহূর্ত ধরা হতো। $360 \times 30 = 10,800$ পাওয়া

* প্রত্নতাত্ত্বিক, গণিতবেত্তা ও বিজ্ঞানের ঐতিহাসিকদের সাম্প্রতিক গবেষণা থেকে কিছু চমকপ্রদ ফল পাওয়া যাচ্ছে। ভারতীয় নক্ষত্রমণ্ডলের ধারণা সম্ভবত সিন্ধু সভ্যতার অবদান। দ্রষ্টব্য : **IJHS, vol-VI, No. I, M. N. Deshpande ; Science and Technology in Ancient India, Page—495-499.**

যায়। সুতরাং 10,800 সংখ্যাটির উদ্ভব ভারতে তাতে সন্দেহ করা চলে না। আবার, 10,800 × 40 = 4,320,000। 40 সংখ্যাটি একটি পঙ্‌ক্তির সিল্যাব্‌ল (Syllables) থেকে পাওয়া যায়। এটি ছিল বেদের একক, সুতরাং এই 4,320,000 সংখ্যার উদ্ভব ভারতে বৈদিক যুগে। এই তথ্য থেকে **Filliozat** মন্তব্য করেছেন, "**We can see also that the figures most probably came to Heraklitus and Berossos from India**".[১৬]

'**যবন**' শব্দ, দুটি সিদ্ধান্ত ও কিছু জ্যোতির্বৈজ্ঞানিক পারিভাষিক শব্দ কেন্দ্র করে ভারতে গ্রীক জ্যোতির্বিজ্ঞানের প্রভাব আলোচিত হয়। বরাহমিহির তাঁর 'পঞ্চসিদ্ধান্তিকা' গ্রন্থে 'যবন' শব্দটি ব্যবহার করেছেন। অবশ্য অন্যত্র শব্দটি দেখা যায়। 'যবন' শব্দটি বিদেশী অর্থে ব্যবহৃত হতো কিনা সে-বিচার না করে প্রায় সব পণ্ডিতরাই এটির গ্রীক অর্থ ধরে নিয়েছেন। কিন্তু মুসলমানদেরও যে 'যবন' বলা হতো তার উল্লেখ পাওয়া যায়। যাই হোক, বর্তমান জ্ঞানের পরিপ্রেক্ষিতে আমরাও 'যবন' শব্দে গ্রীক-ই ধরে নিলাম। গর্গসংহিতার একটি শ্লোকে যবনদের প্রশংসা করে বলা হয়েছে :

ম্লেচ্ছা হি যবনাস্তেষু সম্যক্ শাস্ত্রমিদং স্থিতম্।
ঋষিবত্তেঽপি পূজ্যন্তে কিং পুনর্দৈববিদ্ দ্বিজঃ ॥*

এই শ্লোকে কেবল যবনদের প্রশংসাই করা হয়নি, ব্রাহ্মণদেরও করা হয়েছে,** কিন্তু অনেকে 'কিং পুনর্দৈববিদ্ দ্বিজঃ'—এর কথা ভুলে যান। যাই হোক, জ্যোতির্বিজ্ঞানে গ্রীকদের অধিকার অস্বীকার করা হয় না।

গ্রীকদের রচিত বলে যে দুটি গ্রন্থের কথা বলা হয় তাদের নাম 'রোমক সিদ্ধান্ত' ও 'পৌলিশ সিদ্ধান্ত'। মূল গ্রন্থ অবলুপ্ত। যা আছে তার সারমর্ম দেখা যায় বরাহমিহিরের 'পঞ্চসিদ্ধান্তিকায়। সুতরাং বই দুটির প্রকৃতি ও বৈশিষ্ট্যের সম্পূর্ণ আলোচনা যে সম্ভব নয়, তা বলাই বাহুল্য। তা হলেও কিছু কিছু বৈশিষ্ট্য ধরা পড়ে। যেমন,—পৌলিশ সিদ্ধান্তে যুগ-বিভাগ নেই, পরিবর্তে স্বল্প কালপর্যায় লক্ষ করা যায় ; এতে বারাণসী ও উজ্জয়িনীর দ্রাঘিমা পার্থক্য রয়েছে, আবার যবনপুর বা আলেকজান্দ্রিয়ার দ্রাঘিমা পার্থক্য রয়েছে।

১৬. Indian and Foreign Astronomy—Filliozat, in History of Science in India, Page---779

* এই শ্লোকটি বিবেকানন্দের লেখায় এরকম দেখা যায় :
ম্লেচ্ছা বৈ যবনাস্তেষু এষা বিদ্যা প্রতিষ্ঠিতা।
ঋষিবৎ তেঽপি পূজ্যন্তে—
বিবেকানন্দ রচনা সংগ্রহ, প্রথম খণ্ড, বইপত্র, কলকাতা।

** "এই শ্লোকের উপর পাশ্চাত্যেরা কতই না কল্পনা চালাইয়াছেন। উক্ত শ্লোকে কি প্রকারে প্রমাণীকৃত হইল যে, আর্যেরা ম্লেচ্ছের নিকট শিখিয়াছিল? ইহাও বলা যাইতে পারে যে, উক্ত শ্লোকে আর্যশিষ্য ম্লেচ্ছদিগকে উৎসাহবান করিবার জন্য বিদ্যার আদর প্রকাশিত হইয়াছে।" 'বিবেকানন্দের রচনাসংগ্রহ', প্রথম খণ্ড, পৃষ্ঠা—৩৪

ঋগ্বেদের যুগ থেকেই গ্রহ-নক্ষত্রাদি বিষয়ে সংস্কার, ভবিষ্যদ্বাণী ইত্যাদিতে বিশ্বাস দেখা যায়। সুতরাং জ্যোতিষ (**astrology**) সম্পর্কীয় গ্রন্থাদি প্রাচীন ভারতে—খ্রীস্টপূর্ব শতাব্দীতে সম্ভবত ছিল। এ-বিষয়ের ওপর কোন গ্রন্থাদি পাওয়া যায়নি বলে কোন গ্রন্থ রচিত হয়নি, একথা নিশ্চয় করে বলা যায় না। বৈদিক যুগে '**শকুণবিদ্যা**', ভাবী ঘটনার পূর্বলক্ষণাদি বর্ণিত হয়েছে।[১] ছান্দোগ্য উপনিষদে (**VII. 1. 2 , 4**) '**দৈব**' ও '**নক্ষত্রবিদ্যা**' অর্থে প্রাকৃতিক বিপর্যয় বোঝায়। পাণিনি তাঁর সময়ে শারীরিক চিহ্ন ও ভবিষ্যদ্বাণীতে বিশ্বাসের উল্লেখ করেছেন।[২] কৌটিল্য জ্যোতিষের ওপর অধিক নির্ভরতার বিপক্ষে হলেও '**কার্তান্তিকা**', '**নৈমিত্তিকা**' ও '**মহূর্তিকা**' নামে ষষ্ঠ শ্রেণীর অফিসারের (আধিকারিক) উল্লেখ করেছেন যাদের বাৎসরিক বেতন ছিল এক হাজার পণ।[৩] অবশ্য বৌদ্ধ, জৈন এমন কি কোন ব্রাহ্মণ্য গ্রন্থকার গণ জ্যোতিষচর্চাকারীদের নিন্দাও করেছেন।[৪] সুতরাং এসব উল্লেখ থেকে বলা যায় না যে, প্রাচীন ভারতে জ্যোতিষচর্চা ছিল না। কিন্তু দুঃখের বিষয় পাশ্চাত্ত্য পণ্ডিতরা বরাহমিহিরের রচনায় সংস্কৃত বর্ণীকরণে কিছু গ্রীক শব্দ পেয়ে ও এদেশে জ্যোতিষচর্চার ধূম দেখে ভারতের জ্যোতিষচর্চা মানেই গ্রীক জ্যোতিষচর্চা বা তার প্রাণসঞ্চারী প্রভাব বলে ধরে নিয়েছেন। ভেবার আবার পৌলিশ সিদ্ধান্তের বিষয়বস্তু ও *εισαγωγη*-এর বিষয়বস্তুর মিল দেখতে না পেয়ে অবশেষে মরিয়া হয়ে সিদ্ধান্ত করলেন, "**That the *εισαγωγη*, however, was itself known to the Hindus, in some form or other, finds support in the circumstance that it alone contains nearly the whole of the technical terms adopted by Indian astronomy from the Greek.**"[৫] আবার হোরাশাস্ত্রে যেহেতু রাশিচক্রের খুব গুরুত্ব, সেইহেতু চতুর্থ শতাব্দীর **Firmicus Maternus**-এর পর ভারতে রাশিচক্রের প্রচলন হয়। অথচ ঋগ্বেদের **I. 164. 48** ঋকে রাশিচক্রের উল্লেখ আছে বলে পণ্ডিতরা মনে করেন। ইয়াকোবির রাশিচক্র সম্বন্ধীয় মত গ্রহণযোগ্য কিনা বিস্তারিত গবেষণাসাপেক্ষ।

অলবেরুণী প্রথম পৌলিশ-কে গ্রীক বলে সনাক্ত করেন। তাঁর মতে পৌলিশ **(Paulus) Saintra** অর্থাৎ আলেকজান্দ্রিয়ার অধিবাসী *Esiagoge*-এর রচয়িতা। ভেবার **(Weber)** মনে করেন **Esiagoge** যে-কোন আকারেই হোক হিন্দুদের জানা

---

১. *Omens and Portents in Vedic Literature*, V. R. Pandit, proceedings of the All India Oriental Conference, Nagpur, 1946.

২. *India As known to Paṇini*, V. S. Agarwala, Page—366-337

৩. অর্থশাস্ত্র—IX. 4 ; V. 3

৪. *Pre-Buddhist India*, Mehata, Page—327

৫. *The History of Indian Literature*, পাদটীকা—277, Page, 253-254, ভেবার কর্তৃক মহাভারতের ভগদত্তকে প্রথম অ্যাপোলোডটাস মনে করায় অভিনবত্ব থাকলেও কষ্ট কল্পনামাত্র।—*Ibid*, Page—188' পাদটীকা—202.

ছিল। কারণ, এতে ভারতে ব্যবহৃত অধিকাংশ পারিভাষিক শব্দগুলি পাওয়া যায়।* এমন কি, তিনি বলেন, Esiagoge-এর একটি বিষয়ের সহিত বলভদ্রের হায়নরত্নের হুবহু মিল আছে। অন্য এক পাশ্চাত্য পণ্ডিত অবশ্য Weber-এর এই মন্তব্যে বাড়াবাড়ি লক্ষ করে বলেছেন পৌলিশ সিদ্ধান্ত প্রকৃত জ্যোতির্বিজ্ঞান গ্রন্থ, আর Esiagoge আসলে জ্যোতিষ গ্রন্থ (Astrology)। তা ছাড়া বলভদ্রের শ্লোকের মধ্যে কোন ধার করা কিছু দেখা যায় না বলেও Kern সাহেব মনে করেন। যাই হোক,ভেবার সাহেব ময় নামে এক স্থপতিকে পর্যন্ত টলেমীর নামের সঙ্গে এক করে ফেলেছেন। রোমক সিদ্ধান্তের নাম থেকেই এর বিদেশী মত সূচিত করে। অনেকে 'রোমক' অর্থে আলেকজান্দ্রিয়া বলে মনে করেন। এর 'অহর্গণ' পদ্ধতি, মলমাস, মেটোনিক যুগ ইত্যাদি থেকে ভারতীয় জ্যোর্তিবিজ্ঞানের সহিত পার্থক্য পরিলক্ষিত হয়। এর লেখকের নাম জানা যায় না। বরাহমিহির ও ব্রহ্মগুপ্তও এসম্পর্কে কিছু বলেননি। কিন্তু হিপারকাস-এর বৎসরের সহিত এর সাদৃশ্য দেখা যায়। পণ্ডিতরা বলেন, রোমকসিদ্ধান্ত 150 খ্রীস্টপূর্বাব্দ ও 150 খ্রীস্টাব্দের মধ্যবর্তী কোন সময়ে রচিত হয়ে থাকবে।

পৌলিশও রোমক-সিদ্ধান্ত গ্রীকরাই রচনা করুন বা ভারতীয়রাই গ্রীক পদ্ধতি অনুসরণে রচনা করুন, এই দুটি গ্রন্থ ভারতীয় বিজ্ঞানে নতুন আলোকপাত করতে সমর্থ হয়েছিল, এবং পরবর্তী জ্যোর্তিবিজ্ঞানীরা চিন্তাভাবনার ক্ষেত্রে নতুন কিছু ভাববার সুযোগ পেয়েছিলেন বলে মনে হয়।

ভারতীয় জ্যোর্তিবিজ্ঞান-জ্যোতিষ-গণিতে কয়েকটি গ্রীক পারিভাষিক শব্দ দেখা যায়। Weber মোট 34টি শব্দের তালিকা প্রস্তুত করেছেন। পণ্ডিতদের মতে এগুলি সংস্কৃতে কখনো পরিবর্তিত কখনো বা অপরিবর্তিত রূপে রয়েছে। এখানে কয়েকটি গ্রীক ও সংস্কৃত শব্দের রূপ দেওয়া হলো। আগ্রহী পাঠক Weber-এর History of Indian Literature-এর 254-255 পৃষ্ঠা দেখতে পারেন।

গ্রীক শব্দ	সংস্কৃত শব্দ
লেপটন (Lepton)	লিপ্ত (মিনিট)
অপক্লিম (Apoklima)	অপক্লিম (উন্নতি)
ডেকানস (Dekanos)	দ্রেকাণ
হোরা (Horā)	হোরা
ডায়ামেট্রন (Diametron)	জ্যামিত্র
কেণ্ট্রস (Kentros)	কেন্দ্র
অরিজস (Orizos)	হারিজ

* "...আর্য জ্যোতিষের প্রত্যেক গ্রীকসদৃশ শব্দ সংস্কৃত হইতেই সহজে ব্যুৎপন্ন হয়, যাবনিক ব্যুৎপত্তি গ্রহণে পাশ্চাত্য পণ্ডিতদের যে কি অধিকার, তাহাও বুঝি না।"
বিবেকানন্দ রচনা সংগ্রহ, প্রথম খণ্ড, পৃষ্ঠা—৩৪

Kern সাহেব **Weber** সাহেবের তালিকা থেকে দুটি শব্দ গ্রীক নয় বলে বাদ দিয়েছেন। তার মধ্যে 'কেন্দ্র' একটি। অবশ্য তিনি আবার নতুন একটি শব্দ যোজনাও করেছেন। 'মুনিনাং মতিভ্রম',—আমাদের মত ইতর জনের নানা প্রামাণিকতার প্রশ্ন তোলা বাতুলতা মাত্র।

কোন দেশের জাতীয় সংস্কৃতি যত মহানই হোক না কেন সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন হয়ে বিকশিত হতে পারে না—সমৃদ্ধিশালী হতে পারে না। তাকে অন্য দেশের জ্ঞান ও অভিজ্ঞতা স্বীকরণ করতে হয়। এটাই প্রগতিশীলতার লক্ষণ। অন্যথায় সংস্কার, কুসংস্কারের মরু বালুরাশি তাকে গ্রাস করে। এমনটি বিশ্বের সভ্যদেশগুলির সবার ক্ষেত্রেই ঘটেছে। গ্রীস, মিশর ও ব্যাবিলন থেকে প্রত্যক্ষ জ্ঞান ও অভিজ্ঞতা সঞ্চয় করেছে। এইভাবে গ্রীকদের কাছে '**the transition from perception to reasoning and from reasoning to understanding is natural**'[১] মনে হয়েছে। চীন ও ভারতে অতি প্রাচীনকালেই রাশিচক্রের প্রচলন ছিল। কিন্তু ত্যাং রাজবংশের (**Tang dynasty**) সময়ে চৈনিক রাশিচক্রের সংশোধন হয় ভারতীয় রাশিচক্রের অনুসরণে।[২] হান রাজবংশের (**Han dynasty**) সময়কার ঐতিহাসিকদের সাক্ষ্য অনুসারে পশ্চিম চৌ রাজবংশের পর অর্থাৎ অষ্টম খ্রীস্টপূর্বাব্দের পর ভারত ও চীনের মধ্যে সাংস্কৃতিক যোগাযোগ হয়ে থাকবে। সুতরাং ভারতে গ্রীক আগমনের বহু পূর্বে, এমন কি দারিয়ুস-এর সময়েরও আগে চীন ও ভারতের মধ্যে জ্যোতির্বৈজ্ঞানিক তথ্যাদি বিনিময় অসম্ভব ছিল না।[৩] এই আলোকে ইয়াকোবি ও অন্যান্য পাশ্চাত্য পণ্ডিতদের মত আলোচনা করলে তাঁদের মত যতটা না তথ্যসমন্বিত, তার চেয়ে বেশী উদ্দেশ্য প্রণোদিত বলে মনে হয়। যেমন, আর্যভট সম্বন্ধে **A. Weber**-এর মত : **"He appears to have been a contemporary of Pauliśa ; and, in any case, he was indebted to Greek influence, since he reckons by Zodiacal signs."**[৪] তা ছাড়া পৌলিশ মধ্য রাত্রি থেকে দিন গণনা করেছেন বলে তিনি নিশ্চয় পশ্চিমী তথা গ্রীক। এই যুক্তি দিতে গিয়ে ভেবার সাহেব আর্যভটের অনুরূপ দিন গণনা খেয়াল করেননি। তা হলে বোধ হয় আর্যভটের গ্রীক জ্যোতির্বিজ্ঞানের দ্বারা প্রভাব আরো জোরদার হতো।

একথা সত্য, ভারতীয় জোর্তিবিজ্ঞানে গ্রীক প্রেরণা ও প্রতিক্রিয়া দেখা যায়। ফলত, ভারতীয় জ্যোতির্বিজ্ঞানে নতুন চিন্তা-ভাবনা ও পূর্ববর্তী অনেক স্থূল সূত্র ও ধ্রুবক সংশোধিত ও সংস্কৃত হয়েছিল ; কিন্তু হিন্দুরা **derived the fundamen-**

---

১. *The Treasury of Mathematics* থেকে প্রোক্লাসের মন্তব্য। Page—407

২. *India and Cnina : Scientfic Exchange*, Chin Keh-mu, Page, 783 in Studies in the History of Science in India, vol—2

৩. *Ibid*, Page—783

৪. *The History of Indian Literature*, A. Weber, Page —257

tals of their astronomical science from the Greeks,—ক্যে-এর এই উক্তি মেনে নেওয়া কষ্টকর। এমন কি, জি. এন. বন্দ্যোপাধ্যায় **Hellenism in Ancient India** গ্রন্থের 167 পৃষ্ঠায় কি করে "**the Scientific Astronomy of the Indians should be regarded as an offshoot of the Greek science**" বললেন তার জন্য বিস্তারিত প্রামাণিক তথ্যও পরিবেশন করেননি। জ্যোতির্বিজ্ঞানে গ্রীক প্রভাব, ঋণ বা ভাবের আদান-প্রদান বিষয়টি সম্বন্ধে সুনিশ্চিত মন্তব্য করা কঠিন। কারণ, এ-বিষয়ে এখনো নির্ভরযোগ্য তথ্য ও প্রমাণের অভাব। তবে গ্রীক চিন্তা-ভাবনা যদি ভারতীয়রা গ্রহণ করে স্বীকরণ করে থাকে, তাতে তাদের প্রতিভার মৌলিকতা ও মুক্ত চিন্তনের ঔদার্যই সূচিত হয়েছে। এ-সম্পর্কে রবীন্দ্রনাথের উক্তি স্মরণীয়ঃ "পরকে আপন করিতে প্রতিভার প্রয়োজন। অন্যের মধ্যে প্রবেশ করিবার শক্তি এবং অন্যকে সম্পূর্ণ আপনার করিয়া লইবার ইন্দ্রজাল, ইহাই প্রতিভার নিজস্ব। ভারতবর্ষের মধ্যে এই প্রতিভা আমরা দেখিতে পাই।" ('ভারতবর্ষের ইতিহাস')

৪

গণিতে ভারত-গ্রীস

বিশ্বগণিতে ভারতীয় গণিতের বিশিষ্ট স্থান ও মর্যাদার কথা আজ আর তেমন অজানা নেই। ভারতীয় গণিতজ্ঞদের কয়েকটি আবিষ্কার বিস্ময়কর ও মহামূল্য বলে বিবেচিত হওয়ার যে দাবী রাখে, বিশ্বগণিতের নিরিখে যাঁরা তুলনা করে দেখবেন তাঁরা সহজেই উপলব্ধি করবেন। এই প্রসঙ্গে দশগুণোত্তর স্থানিক মান পদ্ধতিতে সংখ্যা লিখন* ও শূন্য আবিষ্কার যে সবার আগে মনে আসবে তাতে সন্দেহ নেই। বিশ্বের অন্যতম শ্রেষ্ঠ গণিতজ্ঞরাও এতে চমৎকৃত হয়েছেন ও প্রশংসা করেছেন। অধ্যাপক হলস্টেড তো শূন্য আবিষ্কারকে '**নির্বাণ**'-এর সঙ্গে তুলনা করেছেন।[১৭] তবুও এই দুটি আবিষ্কারের কৃতিত্ব ভারতের বলে স্বীকৃত হলেও এখনো কোন কোন পণ্ডিত দ্বিধা কাটিয়ে উঠতে পেরেছেন বলে মনে হয় না। গণিতের প্রখ্যাত ঐতিহাসিক ও বিশেষজ্ঞ ন্যুগেবাওয়ার (**Neugebaur**) বলেন,—**Both place value notation and zero symbol are in ordinaay use in Babylonian and Greek astronomy. The Hindu invention consists only in transforming this method to a number system**

---

* সম্প্রতি চানা বিজ্ঞানী ও পণ্ডিতরা দাবী করছেন তাঁদের দেশেই এই পদ্ধতির প্রথম উদ্ভব। দ্রষ্টব্যঃ *Ancient China's Technology and Science*, Page—57-65.

১৭. 'প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিবৃত্ত' দ্রষ্টব্য

with decimal order. এই মন্তব্যেই থামেননি তিনি, দশগুণোত্তর স্থানিক মান পদ্ধতি ষষ্ঠিক পদ্ধতির সংস্কৃত রূপ বলতেও দ্বিধা করেননি। অবশ্য ন্যুগেবাওয়ারের এই মন্তব্য সকলে মেনে নেননি—গ্রাহ্য হয়নি ; বিশ্বগণিতের ইতিহাসে ওই দুটি অসামান্য আবিষ্কারের কৃতিত্ব প্রাচীন ভারতীয় গণিতজ্ঞদের বলে স্বীকৃত হয়েছে।

প্রাচীন ভারতীয় গণিত ও গ্রীক গণিতের সঙ্গে তুলনা করলে মনে হয় একমাত্র জ্যামিতি ছাড়া পাটীগণিত, বীজগণিতে গ্রীকগণিত ভারতীয় গণিতের তুলনায় শিশু। কিন্তু এই দুইটি দেশের গাণিতিক আবিষ্কার, আর তার মূল্যায়ন করা সহজ নয়। আর সম্ভবত কে ভাল কে মন্দ, এরকম মন্তব্য না করাই শ্রেয়। কারণ, প্রত্যেক জাতি তার নিজস্ব সামাজিক, রাষ্ট্রীয় ও ভৌগলিক পরিবেশের মধ্যে এবং ঐতিহ্য ও সংস্কৃতির অনুবর্তনের মাধ্যমে নিজেদের বিকশিত করে তুলেছে। এবং তারা যা দিয়েছে, তার মূল্য শ্রদ্ধার সঙ্গে স্মরণীয়। ইউডকসাস, ইউক্লিড, অ্যাপোলোনিয়াস, আর্কিমিডিস, হীরন, ডায়োফ্যাণ্টাস যা দিয়েছেন তাঁদের যুগের পরিপ্রেক্ষিতে তার মূল্য অপরিসীম ; আর ভারতীয় গণিতাচার্যরা বৈদিক যুগ থেকে শুরু করে মধ্যযুগ পর্যন্ত যা দিয়েছেন তার মূল্য উপেক্ষা করা যায় কি করে ? একথা সত্য, কোন কোন ক্ষেত্রে দুই দেশের কোন কোন গণিতজ্ঞ অসামান্য প্রতিভা প্রদর্শন করেছেন এবং তাঁদের মৌলিকতা অস্বীকার করা যায় না। কিন্তু গণিতের ঐতিহাসিক ও পণ্ডিতরা এভাবে না দেখে যখন পক্ষপাতিত্ব দোষে দুষ্ট হন, তখন তা খুবই দুর্ভাগ্যজনক।

বস্তুত আমাদের এই ক্ষুদ্র আলোচনায় ভারতীয় গণিতের সাথে গ্রীক গণিতের পুরোপুরি তুলনা সম্ভব নয়। তাই ভারতীয় গণিতে গ্রীক প্রভাব বলে যে বিষয়-গুলি চিহ্নিত হয়, আমরা এখানে সেগুলির উল্লেখ করব, আর মাত্র দু-একটি বিষয় নিয়ে সামান্য আলোচনা করব।

আর্যভটের ট্রাপেজীয় সমস্যা হীরন প্রভাবিত ; ছায়া সমস্যা থ্যালেস প্রভাবিত। ব্রহ্মগুপ্তের মূলদ সমকোণী ত্রিভুজ সংক্রান্ত সমস্যা নাকি গ্রীক প্রভাবিত ; এমন কি তাঁর বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ সম্পর্কিত উপপাদ্যও টলেমীর অনুকরণে। ইউক্লিডের অনুকরণে করণী সংক্রান্ত সমস্যা প্রভাবিত হয়েছে ; আর দ্বিতীয় ঘাতের অনির্ণেয় সমীকরণ ডায়োফ্যাণ্টাসের অনুকরণে ভারতীয়রা যা কিছু করেছেন। শুধু তাই নয়, **Dosypodius** ও **Huet** এরকম মনে করেছেন যে, গ্রীক বর্ণমালার প্রথম নয়টি বর্ণ থেকেই ভারতীয় সংখ্যা গড়ে উঠেছে।* এ-সম্পর্কে ভেবর (**Weber**) বলেন,—**"The Indian figures from 1 to 9 are abbreviated forms of the initial letters of the numderals themselves. The zero too has**

---

* সম্প্রতি চীনা পণ্ডিতরাও একই কথা বলছেন। দ্রষ্টব্য : *Ancient Chind's Technology and Science*, Page—61

arisen out of the first letter of the word *sūnya.*[১৮] এমন কি, ভারতীয় জ্যামিতি যা শুল্বসূত্রে নিহিত আছে, তা-ও গ্রীক প্রভাবিত বলে মনে করা হয়, এবং এতে নাকি হীরনের প্রভাব আছে। বোধায়ন অন্তত হীরনের ন'শ' বছর পূর্ববর্তী।

প্রাচীন ভারতীয় জ্যামিতি অর্থাৎ 'শুল্ব সূত্র'-এর সঙ্গে নাকি গ্রীক জ্যামিতির সাদৃশ্য বিবেচনা করার মত। প্রখ্যাত গণিতের ঐতিহাসিক ক্যাণ্টর (**Cantor**) সেই কারণে অনুমান করেন '**borrowing**' নিশ্চয় হয় এদিক না হয় ওদিক থেকে ঘটেছিল। কিন্তু কোনদিকে এই **borrowing** ঘটেছিল ? কোন দেশ কার কাছে **borrow** করেছিল ? সন্দেহ নেই, ক্যাণ্টর বিখ্যাত গণিতের ঐতিহাসিক ও বিশেষজ্ঞ। তাই তাঁর তাত্ত্বিক গবেষণায় প্রকাশ পেল শুল্বসূত্র আলেকজান্দ্রিয় জ্যামিতি কর্তৃক প্রভাবিত হয়েছে। সেই জ্যামিতি অবশ্য ইউডকসাস, ইউক্লিড বা অন্য কারুর নয়, তা হীরন বা হীরোর। ক্যাণ্টর এরূপ মনে করেন, **100** খ্রীস্টপূর্বাব্দে তাঁর জ্যামিতি ভারতে আমদানী হয়, এবং শুল্বসূত্র রচিত হয় তাঁর জ্যামিতির আদলে।

কিন্তু পাঠক স্মরণ করুন শুল্বসূত্রের উদ্ভব বৈদিক যুগের প্রারম্ভে। যজুর্বেদ, সংহিতা ও ব্রাহ্মণ গ্রন্থগুলিতে শুল্বের বিবিধ আলোচনা রয়েছে। বেদ মুখেমুখে পড়ানো ও শেখানো হতো বলে শুল্বসূত্রও আগে রচিত হয়নি। শুল্বকার আচার্য বোধায়ন-ই যখন এর লিখিত রূপ দেন, তখন খ্রীস্টপূর্ব 800—900 শতাব্দী। তখন গ্রীকদের আদি গণিতজ্ঞ-জ্যোতির্বিদ থ্যালেসের জন্মও হয়নি। সুতরাং ক্যাণ্টর সাহেবের অনুমান ও ভারত সম্পর্কে ধারণা লক্ষ করার মত। এই সম্পর্কে অবশ্য পাশ্চাত্য সব মনস্বীই ক্যাণ্টরের মত মেনে নেননি। অধ্যাপক ম্যাগডোনেল (**Macdonell**) সাহেবের মত একটু দীর্ঘ হলেও পাঠকদের সুবিধার জন্য তুলে ধরা হলো ঃ "The Sulva Sūtras are, however, probably far earlier than that date, and their geometry is a part of the Brahmanical theology, having taken its rise in India from practical motives as much as the science of grammar. The prose parts of the Yajur-vedas and the Brahmnas constantly speak of the arrangement of the sacrificial ground and the construction of altars according to very stict rules, the slightest deviation from which might cause the greatest disaster. It is not likely that the exclusive Brahmans should have been willing to borrow anything closely connected with their religion from foreigners."[১৯] মন্তব্য নিষ্প্রয়োজন। কিন্তু

১৮. Hellenism in Ancient India—G. N. Banerjee, Page—159
১৯. A History of Sanskrt Literature—A. A. Macdonell, Page—361

তাঁর শেষের মন্তব্য শ্রদ্ধেয় নয়। হিন্দুধর্মের স্বরূপ, প্রকৃতি ও বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে যাঁরা অবহিত, তাঁরা অবশ্যই বুঝবেন।

পাশ্চাত্য পণ্ডিতরা যে সব বিষয়ে গ্রীক প্রভাব আছে বলে মনে করেন, আমরা তার কয়েকটি মাত্র ওপরে উল্লেখ করলাম। এখানে সব প্রশ্নের উত্তর দেওয়া সম্ভব নয়। আগ্রহী পাঠক প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিহাস পড়লে অনেক কিছু বুঝতে পারবেন এবং সত্যাসত্য বিচার করতে পারবেন। আমরা এখানে কেবল একটি বিষয় ডায়োফ্যান্টাসের অনির্ণেয় সমীকরণ বিষয়ে সামান্য আলোচনা করব। তাহলেই পাঠক বুঝতে পারবেন ভারতীয় গণিতে গ্রীক প্রভাব কতখানি।

ভারতীয় গণিতে $Nx^2 \pm c = y^2$ সমীকরণটি অনির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ নামে অভিহিত। এই অনির্ণেয় সমীকরণটি নিয়ে ব্রহ্মগুপ্ত তাঁর ব্রহ্মস্ফুটসিদ্ধান্তে আলোচনা করেছেন। তারপর থেকে প্রায় সব ভারতীয় গণিতজ্ঞই এই সমীকরণ নিয়ে আলোচনা করেছেন। যেমন—দ্বিতীয় ভাস্করাচার্য, কমলাকর, শ্রীপতি, নারায়ণ প্রমুখ তাঁদের মধ্যে কয়েকজন।

গণিতের প্রখ্যাত ঐতিহাসিক **পল ট্যানারী, টি. এল. হীথ, জি. আর. ক্যে.** প্রমুখ মনে করেন উপরোক্ত সমীকরণটির সমাধানে ভারতীয়রা গ্রীসের নিকট ঋণী। ক্যে সাহেব মনে করেন ব্রহ্মগুপ্তের জ্যোতির্বিজ্ঞান গ্রীক প্রভাবিত এবং তিনি এই সমীকরণের সমাধান নিজে করেননি। এইসব অভিযোগের উত্তর পি. সি. সেনগুপ্ত, এস. কে. গাঙ্গুলি প্রমুখ দিয়েছেন।

ডায়োফ্যান্টাস $ax^2+1=b^2$-এর সাধারণ সমীকরণ দেননি। কিন্তু এই ধরনের সমীকরণের বিশেষ ক্ষেত্রের আলোচনা তাঁর গ্রন্থে দেখা যায়।

$y=kx+c$ ধরে এবং k^2 এমন একটি পূর্ণবর্গ রাশি যা a এর নিকটবর্তী মনে করে তিনি $ax^2+c^2=y^2$ সমীকরণের সমাধান করেছেন। তাঁর গ্রন্থের কয়েকটি উদাহরণ ঃ

(i) $72m^2+81=(8m+9)^2$

(ii) $26x^2+1=(5x+1)^2$

(iii) $65m^2+25=(8m+5)^2$

ওপরের সমীকরণগুলির সমাধান ডায়োফ্যান্টাস যেভাবে করেছেন, তা ব্রহ্মগুপ্তের পদ্ধতি থেকে সম্পূর্ণ পৃথক। ব্রহ্মগুপ্ত তাঁর উপাত্তের বারবার প্রয়োগ করে অসংখ্য সমাধানের কথা বলেছেন। ডায়োফ্যান্টাস $15m^2-36=$একবর্গ রাশি বললেও এর সমাধান তিনি দিতে পারেননি।

$Nx^2+1=y^2$ সমীকরণের সমাধান ডায়োফ্যান্টাসের লুপ্ত গণিতাংশে আছে

বলে ট্যানারী, হীথ প্রভৃতি মনে করেন। কিন্তু তা মেনে না নেওয়ার যথেষ্ট কারণ আছে এইজন্য যে তিনি নিম্নরূপ সমীকরণগুলির সমাধান করেছেন :

(i) $72m^2+81=$ কোন রাশির বর্গ

(ii) $26x^2+1=$ কোন রাশির বর্গ

(iii) $65m^2+25=$ কোন রাশির বর্গ

কিন্তু এগুলির সমাধানে অনেকগুলি অখণ্ড বীজ পাওয়া যায় না। বস্তুত প্রাচীন ভারতীয় গণিতের বিশেষজ্ঞরা, যেমন, পি. সি. সেনগুপ্ত, এস.কে. গাঙ্গুলি, এন.কে. মজুমদার প্রমুখ এই সমস্যার উপযুক্ত সমাধান করেছেন, তাতে সন্দেহ নেই। কিন্তু তবুও কোন কোন পাশ্চাত্য ঐতিহাসিক মনে করেন ভারতীয়রা গ্রীসের নিকট ঋণী। এ বিষয়ে ডঃ প্রদীপকুমার মজুমদার যে সিদ্ধান্তে এসেছেন, তা এখানে উদ্ধৃত হলো ঃ

(1) পেলীয় সমীকরণের অখণ্ড সমাধান ডায়োফেণ্টের হারানো এরিথমেটিকাতে আছে কিনা তা রীতিমত সন্দেহের ব্যাপার।

(2) তথাকথিত পেলীয় সমীকরণ সমাধানে আর্যভট, ব্রহ্মগুপ্ত ও দ্বিতীয় ভাস্করাচার্য গ্রীকদের নিকট ঋণী নয়।

(3) ব্রহ্মগুপ্ত সম্পর্কে ক্যে প্রমুখের মন্তব্য ত্রুটিপূর্ণ, সেইহেতু বর্জনীয়।

(4) একমাত্রার অনির্ণেয় সমীকরণ আর্যভটের পদ্ধতি গ্রীক প্রভাব মুক্ত।

(5) ভারতীয় পেলীয় সমীকরণ সমাধানে বিদেশী প্রভাবমুক্ত।[২০]

প্রকৃতপক্ষে, পাশ্চাত্য পণ্ডিতদের মধ্যে ভারতীয় জ্যোতির্বিজ্ঞান, গণিত ও বিজ্ঞান সম্বন্ধে যে ভ্রান্ত ধারণা আছে, তার জন্য আমরা বহুলাংশে দায়ী। প্রাচীন ভারতে বিজ্ঞানে কতদূর উন্নতি হয়েছিল তা অনেকেই আমরা জানি না। অবশ্য কাজটি যে কঠিন ও দুরূহ তাতে সন্দেহ নেই। কারণ, এ বিষয়ে সম্যক জ্ঞানলাভ করতে হলে এবং আলোচনায় অগ্রসর হতে হলে প্রাচীন ভারতের ভাষা, সাহিত্য, ইতিহাস যেমন জানা দরকার, তেমনি বিজ্ঞানেও সম্পূর্ণ জ্ঞান থাকা দরকার। আমাদের দেশের বিজ্ঞানীরা এই মহৎ দায়িত্ব গ্রহণ না করলে কাজটি যে সুষ্ঠুভাবে সম্পন্ন হবে না, তা বলাই বাহুল্য। কিন্তু আচার্য প্রফুল্লচন্দ্র, আচার্য ব্রজেন্দ্র নাথ শীল, বিভূতিভূষণ দত্ত, প্রিয়দারঞ্জন রায় খুব কমই আছেন। ইউরোপের বিজ্ঞানীদের মধ্যে অনেকে গ্রীক ভাষা ও সাহিত্যে সুপণ্ডিত ছিলেন, এবং সেইজন্যই তাঁরা বিজ্ঞানের ইতিহাসে গ্রীসের স্থান নিরূপণ করতে সমর্থ হয়েছিলেন। অতি সম্প্রতি এ-বিষয়ে আমাদের দেশে সামান্য কাজ হয়েছে বটে, কিন্তু তা তেমন সন্তোষজনক বলে মনে হয় না। আচার্য রমেশচন্দ্র মজুমদার তাঁর প্রাচীন ভারতে বিজ্ঞানচর্চা গ্রন্থের উপসংহারে যে মন্তব্য করেছেন, তা তুলে ধরে

২০। প্রাচীন ভারতে গণিতচর্চা—প্রদীপকুমার মজুমদার, পৃ—৩১৩

আমরাও একই মত পোষণ করি ঃ "এই কার্য উপযুক্তভাবে করিতে হইলে বৈজ্ঞানিক, ঐতিহাসিক ও সংস্কৃতজ্ঞের একসঙ্গে কাজ করিতে হইবে। ইহার জন্য চাই একটি উপযুক্ত প্রতিষ্ঠান এবং বহু বিশেষজ্ঞের সহযোগিতা।"[২১] প্রতিষ্ঠান নেই তা নয়, কিন্তু তার কাজকর্ম বড়ই দীর্ঘসূত্রী।

ভারতীয় সাহিত্য ও সংস্কৃতির বিভিন্ন দিকগুলি বড় বিচিত্র ও ঐশ্বর্যপূর্ণ। রাজনীতি-অর্থনীতি-চিকিৎসাবিদ্যা-জ্যোতিষ—জ্যোতির্বিদ্যা, পাটীগণিত—সঙ্গীত—নাটক-নৃত্যকলা-ইন্দ্রজাল-কামশাস্ত্র ইত্যাদি সবকিছু বৈজ্ঞানিক ভাবনা ও পদ্ধতি-যুক্ত। এইসব বিষয় যথাযথভাবে আধুনিক মনের উপযোগী করে সুসম্পাদিত করে বিশ্ব সমক্ষে তুলে ধরার দায়িত্ব আমাদের। কিন্তু আমরা সেই দায়িত্ব পালন করতে পেরেছি বলে মনে হয় না ; এখনো এসব বিষয়ের অভ্যন্তরে প্রবেশ করার জন্য বিদেশী পণ্ডিতদের মুখাপেক্ষী হয়ে থাকতে হয়। বিদগ্ধ সুধীমণ্ডলী এ-বিষয়ে অগ্রসর হবেন বলে মনে করি।

ভারত-গ্রীক সাংস্কৃতিক সংযোগ ও সম্পর্ক সম্বন্ধে আমাদের এই সংক্ষিপ্ত আলোচনায় এটা স্পষ্ট যে, প্রাচীনকালে ভারতের সহিত অন্যান্য দেশ, ব্যাবিলন, মেসোপটেমিয়া, চীন ও গ্রীসের সাংস্কৃতিক বিনিময় ছিল, কখনও প্রত্যক্ষভাবে আবার কখনো পরোক্ষভাবে। এই সম্পর্ক বা সংযোগ ও সাংস্কৃতিক আদান-প্রদান সাধারণভাবে জ্যোতির্বিজ্ঞান, গণিত ও অন্যান্য বিজ্ঞানের অগ্রগতিতে খুবই ফলপ্রদ হয়েছিল বলে গণ্য না করার বিশেষ হেতু নেই। এতে কেবল ভারতই লাভবান হয় নি, অন্যান্য দেশও বহুল পরিমাণে লাভবান ও উপকৃত হয়েছিল। সেইজন্যই বিশ্ববিজ্ঞান ও সংস্কৃতির ইতিহাসে সব দেশের অংশগ্রহণ দেখা যায়। ভারতীয় জ্ঞান-বিজ্ঞান কেবল প্রাচুর্যেই বিশাল ছিল না—এশিয়া-ভূখণ্ডেই সুবিস্তৃত ছিল না, প্রাচীন মেসোপটেমিয়া, ইরান, গ্রীস, চীন ও আরব দেশসমূহে প্রচারিত ও প্রসারিত হয়ে বিশ্ববিজ্ঞান অভিধা প্রাপ্ত হয়েছিল। এক সময় তো মেসোপটেমিয়া বৃহৎ ভারতীয় ভূখণ্ডের অন্তর্ভুক্তই ছিল। বস্তুত, কোন দেশ সর্বপ্রথম বা সকলের আগে কোন বিষয় উদ্ভাবন বা আবিষ্কার করেছিল, এই নিষ্ফল বিতর্কে সময় নষ্ট করার চেয়ে অধিক মূল্যবান প্রশ্ন হলো বিশ্ববিজ্ঞানের প্রসার ও সমৃদ্ধিতে ওইসব বিষয়ের মূল্য ও কার্যকারিতা। অবশ্য সব দেশেরই সমাজ-গঠন, বিধি নিয়ম, শাসক সম্প্রদায়ের মনোভাবের মধ্যে বিজ্ঞান-বিকাশের সীমাবদ্ধতা নিহিত। গ্রীক বিজ্ঞানও এ-থেকে মুক্ত নয়। তাই যারা জ্ঞান-বিজ্ঞানে **'miracle'** ঘটিয়েছিল, তাদের সব সাধনাই অন্ধকারের গভীরে নিক্ষিপ্ত হয়েছিল। ফ্রান্সিস বেকন বলেছিলেন **"if you make a vestal virgin of Science you must not expect her to bear fruit"** প্রাচীন সভ্যদেশগুলির অবনতি, অবক্ষয় ও বন্ধ্যাত্ব এই আলোকে বিচার করলে দিনের আলোর মত স্পষ্ট হয়ে ওঠে। যে-সংযোগ

২১। প্রাচীন ভারত বিজ্ঞানচর্চা—রমেশচন্দ্র মজুমদার, পৃ—৫৩

বলকারী ফল দান করেছিল, তার বিচ্ছেদ, ক্রীতদাস, বেগারদের শ্রমে জীবিকা অর্জন একদিন বলক্ষয়ে অপমৃত্যু ঘটিয়েছিল। বস্তুত, গ্রীক বিজ্ঞানের অবনতির কারণ সম্বন্ধে ফ্যারিংটন যা বলেছেন, * তা সব দেশের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। শেষে নীডহামের এই উক্তি বিশ্ববিজ্ঞানে বিভিন্ন দেশের অংশগ্রহণ সম্বন্ধে খুবই প্রযোজ্য :

"I confidently anticipate therefore a great revival of interest in the relations of science and society during the crucial European centuries, as well as a study ever more intense of social structures of all civilisations, and the delineation of how they differed in glory, one from another."**

---

* *Greek Science*, B. Farrington, Pelican, Page—303, 1963

** *The Science of Science* J. Needham, Page—187

সংযোজন

বিজ্ঞান, গণিত ও জ্যোতির্বিজ্ঞানের ক্ষেত্রে ভারত ও গ্রীসের সাংস্কৃতিক আদান-প্রদান সম্পর্কে সামান্য আলোচনা করেছি। কিন্তু এসব আলোচনা ও বিতর্ক প্রধানত স্বাধীনতার পূর্ববর্তী সময়কার। ভেবার, থিবো, হর্নেল, কীথ, তিলক ইয়াকোবি প্রমুখের গবেষণা এমন সময় হয়েছে যখন প্রাচীন ভারতীয় জ্ঞান-বিজ্ঞানের নানা বিষয়ের উৎস খুঁজতে গেলে ঋগ্বেদ ছাড়া আর কোন উপায় ছিল না। ফলত, তাঁরা এমন সব সিদ্ধান্ত করে বসেছেন যাতে কিছু-না-কিছু যুক্তি অবশ্যই ছিল, কিন্তু তা তথ্য,—ঐতিহাসিক তথ্য সমন্বিত ছিল না। দুর্ভাগ্যের বিষয়, এখনো কোন কোন গবেষক ও পণ্ডিত এমন সব মন্তব্য করছেন যাঁদের যুক্তির মধ্যে আবেগের প্রাধান্য বেশী। সিন্ধুসভ্যতার নিদর্শন আবিষ্কারের আগে পণ্ডিতদের মধ্যে এই রীতি কার্যকর ছিল, এবং এখনো বেশ আছে,—বিশেষত যাঁরা ধর্মতত্ত্ব ও সংস্কৃতবিদ্যার আলোচনা করেন। কিন্তু স্বাধীনতার পর যে-সব প্রত্নতাত্ত্বিক নিদর্শন আবিষ্কৃত হয়েছে, এবং সে-সবের ব্যাখ্যা-বিশ্লেষণ করা হয়েছে, তাতে প্রাচীন ভারতীয় ইতিহাসের ওপর নতুন আলোকপাতের উজ্জ্বল সম্ভাবনা দেখা দিয়েছে। যেমন,—বৈদিক যুগে অর্থাৎ **First Urbanization**-এর পর যে-সব উৎস খোঁজা ও ব্যাখ্যা-বিশ্লেষণ করা সম্ভব হচ্ছিল না, তা এই নবতর আলোকে করা সম্ভবপর হচ্ছে। আমরা অতি সংক্ষেপে এখানে প্রাচীন ভারতীয় জ্যোতির্বিজ্ঞান ও গণিতের কয়েকটি সমস্যা এই আলোকে ব্যাখ্যা করার প্রয়াস পাব যা এতদিন যে-সব ব্যাখ্যা দেওয়া হয়েছে বা যে-মতবাদ প্রচলিত আছে, সে-সব সম্পর্কে নতুনভাবে চিন্তা-ভাবনা করার অবকাশ ও সুযোগ করে দিয়েছে।

জ্যোতির্বিজ্ঞান সম্পর্কীয় সমস্যা ও সম্ভাব্য সমাধান

ফরাসী ভারততত্ত্ববিদ লুই রেনো-এর (**Louis Renou**) মতে আর্যদের ভারতে আগমন খ্রীস্টপূর্ব **1500-1600** অব্দে। ম্যাক্সমূলারের এই অভিমত। সুতরাং ঋগ্বেদের রচনাকাল এই সময়ের কাছাকাছি কোন এক সময়ে। ডঃ শর্মার মতে, যজু, ব্রাহ্মণ ও উপনিষদের রচনাকাল **1000** খ্রীস্টপূর্বাব্দের আগে নয়। রেনোর মতে, ব্রাহ্মণ গ্রন্থাদির রচনাকাল দশম থেকে সপ্তম খ্রীস্টপূর্বাব্দের মধ্যে।* এই তারিখ ধরে নিয়ে বৈদিক গ্রন্থ থেকে দুটি জ্যোতির্বৈজ্ঞানিক তথ্য বিশ্লেষণ করে আমরা দেখবার চেষ্টা করব এই তথ্যের উৎস বৈদিক যুগে *Dark Age*-এ নয়, তা *First Urbanization*-এর যুগে অর্থাৎ সিন্ধুসভ্যতার যুগে।

---

* *Material Culture and Social Formations in Ancient India*—R. S. Sharma, New Delhi, 1983.

আমরা অনেকেই জানি যে, ভারতীয় জ্যোতির্বিজ্ঞান ও পঞ্জিকায় 27টি নক্ষত্রের গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা। এই তারকাদের নাম বৈদিক গ্রন্থসমূহে দেখা যায়। তৈত্তরীয়, কাঠক ও মৈত্রায়নী সংহিতা ও অথর্ববেদের 19-তম মণ্ডলে 27টি নক্ষত্রের তালিকা আছে। এইসব তারকাদের নামের প্রথমেই 'কৃত্তিকা'-র নাম করা হয়। 'কৃত্তিকা' আধুনিক জ্যোতির্বিজ্ঞানে *Pleiades* নামে চিহ্নিত। শতপথ ব্রাহ্মণ থেকে জানা যায় যে, 'কৃত্তিকা' পূর্বদিকে উদিত হয়, আর সপ্তর্ষি (*Great Bear*) উত্তর দিকে। এই তথ্য আধুনিক জ্যোতির্বৈজ্ঞানিক পদ্ধতিতে বিশ্লেষণ করে পাওয়া গেছে যে, এই ঘটনা **2334** খ্রীস্টপূর্বাব্দে সম্ভব।* তা হলে প্রশ্ন—শতপথ ব্রাহ্মণ কি **2334** খ্রীস্টপূর্বাব্দে রচিত হয়েছিল? কিন্তু তা সম্ভব নয়। তা হলে জ্যোতিবিজ্ঞানের তথ্য বা গণনা কি মূল্যহীন? তাও সম্ভব নয়। সুতরাং আমাদের এমন অনুমান করতে হয় যে, 'কৃত্তিকা' সম্পর্কীয় তথ্য সিন্ধুসভ্যতার যুগের। কিন্তু সিন্ধুসভ্যতায় কি মানুষের জ্যোতির্বিজ্ঞান সম্পর্কে কোন ধারণা ছিল? বর্তমান গবেষণার পরিপ্রেক্ষিতে এ সম্পর্কে নিশ্চিত তথ্য পাওয়া যায়নি। কিন্তু নানা পারিপার্শ্বিক সাক্ষ্য থেকে প্রত্নতত্ত্ববিদরা যে অনুমান করেছেন ও আধুনিক কম্পিউটারের সাহায্যে যে বিশ্লেষণ পাওয়া গেছে, তা একেবারে উড়িয়ে দেবার মত নয়।

Asko Parpola মনে করেন সিন্ধুসভ্যতার যুগে মানুষের ভাষার সহিত দ্রাবিড় ভাষার সম্পর্ক আছে। সোভিয়েত পণ্ডিতরা মনে করেন, সিন্ধুসভ্যতায় প্রাপ্ত সীলমোহরে অঙ্কিত **'মাছ'**-এর প্রতীকের সহিত 'তারা' বা নক্ষত্রের সম্পর্ক আছে। সুতরাং মাছের পাশে তিনটি করে মোট ছ'টি উল্লম্বরেখা দ্বারা ছ'টি নক্ষত্র বোঝান হয়েছে। আবার *Pleiades*-এর প্রাচীন তামিল নাম 'অরু-মিন' (***aru-min***) অর্থাৎ ছ'টি নক্ষত্র। এর পর **Parpola** কিছু প্রামাণিকতা উল্লেখ করে বলেছেন,—
"While absent in the Avesta and the older books of the Ṛgveda (the latter composed on or soon after the arrival of the Ṛgvedic tribes in India), the names of the lunar asterism (Sanskrit *naksatra*) appear in a complete list in *Atharvaveda*. It seems quite certain that the Aryans learnt the naksatras in India······ The date when the naksatra calendar was compiled can be determined by means of astronomical evidence inherent in it : it was in all likelihood around the 24th Century B. C. (Needham 1959 P. 246 ff.), which coincides with the peak of the Harappan urbanization, adding thus one more means for defining its

---

* *History of Science and Technology in Ancient India*. D. P. Chatterjee Page—480-484, 495-501.

chronology."*

চন্দ্রপথের ভ্রমণে যে তারকাপুঞ্জ পড়ে তার উৎপত্তি নিয়ে নানা বিতর্ক পণ্ডিতদের মধ্যে দেখা যায়। নক্ষত্র পদ্ধতির উৎপত্তি সম্পর্কে **Weber, Oldenberg, Needham** প্রমুখ এর ব্যাবিলনীয় উৎসের কথা বলেন। অবশ্য তাঁদের মতের বিরোধিতা করতেও অন্য পণ্ডিতদের দেখা যায়। **Biot** এই পদ্ধতির উদ্ভব **2400** খ্রীস্টপূর্ব অব্দে বলে মনে করেন। নক্ষত্র সম্পর্কীয় গণনা ও আলোচনার পর অধ্যাপক দেবীপ্রসাদ চট্টোপাধ্যায় যে মন্তব্য করেছেন, তার সারবত্তা অস্বীকার করার তেমন উপায় নেই বলে মনে হয়। তাঁর কথায়,—"**Admitting Biots' dating of the formation of the original nucleus of the system and encouraged by the recent tendency of reading some of the *naksatra* names in the Indus "seals", it may not be *prima facie* impossible to think that the progress of our knowledge of the Indus Civilization may in future reach a stage showing the prevalence of the *naksatra* system (or something closely resembling it), already, during the period of our First Urbaniza- tion·········we have to accept Parpola's claim that the Vedic people originally unaware of any astronomical knowledge worth its name—evidently acquired (and used scraps of it) from the tradition coming down from the Harappan period.**"** সেইজন্যই সম্ভবত বৈদিক যুগের পুরোহিতরা কৃত্তিকার পূর্বদিকে উদয় গ্রহণ করেছিল যখন সত্যিকার কিন্তু কৃত্তিকা পূর্বদিকে উদিত হচ্ছিল না। ডঃ রমাতোষ সরকার দেখিয়েছেন যে, **'ভোগ'** বা **স্ফুটের** (**celestial longitude**) বৃদ্ধির হার ক্ষুদ্র হলেও পরিবর্তনশীল। **1900** খ্রীস্টাব্দে এই হার ছিল বৎসরে **50''·256** এবং **2000** খ্রীস্টাব্দে হবে **50''·279** এবং **2000** খ্রীস্টপূর্বাব্দে ছিল **49''·390**। তিনি গড় হার বৎসরে **49''·835** ধরে নিয়ে *Eta Tauri*-এর **'ভোগ'** বা **'স্ফুট'** **1985** খ্রীস্টাব্দে প্রায় **59°47'24''** ধরে গণনায় **4319** বৎসর পূর্বে কৃত্তিকা পূর্বদিকে উদিত হয়েছিল বলে প্রতিপন্ন করেছেন।† বস্তুত, কোন জ্যোতি-বৈজ্ঞানিক তথ্য আমাদের বৈদিক সাহিত্য ও পুরাণে দেখলেই যে, তা সেই সাহিত্য ও পুরাণের রচনাকাল সময়ের, এই সিদ্ধান্ত করা যায় না। এই প্রেক্ষিতে তিলক, ইয়াকোবি প্রমুখের বৈদিক সাহিত্য রচনাকালের তারিখ বিবেচনা করলে অসঙ্গতি দেখা দেওয়ার সম্ভাবনা কম। গবেষণায় এই নতুন দিকের আলো দেখানোর

---

* Ibid, Page—248-249.

** Ibid, Page—253

† Ibid, Page—483 ; ডঃ রমাতোষ সরকার ও ডঃ অপূর্বকুমার চক্রবর্তীর গণনায় কিছু পরিবর্তন দেখা যায়। কিন্তু তার জন্য আমাদের সংহিতাকারদের অস্পষ্টতা দায়ী।

জন্য আমাদের প্রত্নতাত্ত্বিকদের অশেষ ধন্যবাদ জানাতে হবে। এই সম্পর্কে দেশপাণ্ডের রচনা উল্লেখযোগ্য।*

গণিত সম্পর্কীয় সমস্যা ও সম্ভাব্য সমাধান

বৈদিক সাহিত্যে যে নানা জ্যোতির্বৈজ্ঞানিক তথ্য লক্ষ করা যায় তা-ই নয়, এতে নানা গাণিতিক তথ্য ইতস্তত বিক্ষিপ্ত হয়ে যেমন আছে, তেমনি আবার **"শুল্বসূত্র"**-য় নানা জ্যামিতিক অঙ্কনের সহিত গণিত-জ্ঞানও লিপিবদ্ধ হয়েছে। শুল্বসূত্র-এর উদ্ভব সম্বন্ধে প্রচলিত মত হচ্ছে যে, বৈদিক যজ্ঞ ও বেদী নির্মাণের অত্যাবশ্যকীয়তা। কিন্তু যজ্ঞ ও বেদী নির্মাণে ইট ব্যবহার করা হয়। এই ইটের আকার ও প্রকার বিভিন্ন ধরনের হওয়া প্রয়োজন, আর বিভিন্ন অগ্নি ও বেদীর ক্ষেত্রফল, আয়তন ও ইটের সংখ্যাও নির্দিষ্ট হওয়া প্রয়োজন।

এই ক্ষুদ্র তথ্য থেকে বুঝতে অসুবিধা হয় না যে, যজ্ঞ-বেদী নির্মাণের সঙ্গে ইটের টেকনলজির একটা ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক আছে। কিন্তু প্রত্নতাত্ত্বিক খনন থেকে এই বৈদিক যুগের অর্থাৎ ***Dark Age***-এর ইট প্রযুক্তি বা কারিগরির কোন সাক্ষ্য-প্রমাণ এখনো পাওয়া যায়নি। অথচ প্রায় **500,000** বর্গ মাইল জুড়ে বিশাল অঞ্চলে সিন্ধুসভ্যতার নগর-জীবনে ব্যবহৃত নানা ধরনের ইট পাওয়া যাচ্ছে। আর্যরা যে নগরসভ্যতার ধারক ছিল না—যাযাবর পশুপালন প্রকৃতির ছিল, তাতে সন্দেহ করার খুব বেশী কারণ খুঁজে পাওয়া যায় না। মাটির ঘরবাড়ী বা কাঠের ঘরবাড়ীতে তারা বসবাস করত বলেই তা কালক্রমে ধ্বংস হয়ে যাওয়ায় আর পাওয়া যাচ্ছে না। সুতরাং এরূপ অনুমান করলে কল্পনার আশ্রয় নেওয়া হয় না যে, আর্যরা সিন্ধুবাসীদের মত ইটের প্রকৌশল ও কারিগরি জ্ঞানে তেমন সমৃদ্ধ ছিল না; খুব সম্ভব ইট তৈরী করার বিদ্যা তাদের আয়ত্তে ছিল না। কিন্তু আর্যদের ইট ব্যবহার করে অগ্নি ও বেদী নির্মাণ করার সাক্ষ্য শুল্বসূত্রে দেখা যায়। এখন প্রশ্ন হলো, এরা যদি ইট নির্মাণ করতে জানত না বা ইট তৈরীর প্রযুক্তি সম্বন্ধে অনবহিত ছিল, তা হলে কি করে বা কিভাবে এর ব্যবহার করত? এর সম্ভাব্য উত্তর এই হতে পারে যে, সিন্ধুসভ্যতার যুগের মানুষরা যারা এ-যুগে আর্যদের সংস্পর্শে এসেছিল, তারাই ইট তৈরী করত বৈদিক শুল্বকারদের তত্ত্বীয় নির্দেশ অনুসারে।

আর যজ্ঞ ও বেদী নির্মাণ থেকে শুল্বসূত্রের **'অন্তঃ প্রকৃতি'** বিচার-বিশ্লেষণ করলে প্রচলিত তত্ত্বের সারবত্তা খুঁজে পাওয়া যায় না। বিভিন্ন-প্রকার বেদী নির্মাণের সঙ্গে প্রায়ই ধর্মীয়-কুসংস্কার যুক্ত হতে দেখা যায় যা সম্পূর্ণ পুরোহিত সম্প্রদায়ের আবিষ্কার কেবল ভয় ও ভীতি প্রদর্শন করে প্রভূত পরিমাণ **'দক্ষিণা'** আদায়ের জন্য।

---

* IJHS, vol.—VI No. 1

শুল্বসূত্রের বিশ্লেষণ থেকে কয়েকটি সিদ্ধান্ত

(1) এই শাস্ত্রের অন্তঃপ্রকৃতি বিশ্লেষণ করলে পাওয়া যায় যে, ইট প্রস্তুত-কারক ও ইট দিয়ে নির্মাণকার্যাদি কারকদের কাছ থেকেই এই শাস্ত্রের তত্ত্বীয় জ্ঞানের উদ্ভব।

(2) শুল্বসূত্রের উদ্ভব সম্বন্ধে যত তর্ক-বিতর্কই থাকুক, এর রচনাকাল অন্ধকার যুগের (Dark Age) বাইরে নিয়ে যাওয়া যায় না।

(3) শুল্বসূত্রের যুগে ইট কারিগরি স্তরের তত্ত্বীয় স্থান থেকে গণিতের উদ্ভব হলো, অথচ সে-যুগে ইট কারিগরি বা প্রযুক্তির প্রচলন ছিল না। এ থেকে এই সিদ্ধান্ত করা যায় যে, প্রাচীন ভারতীয় গণিতের উদ্ভব *Dark Age*-এ নয়, *First Urbanization*-এর সময়ে অর্থাৎ সিন্ধুসভ্যতার সময়ে।

কিন্তু First Urbanization-এর সময়ে সিন্ধুবাসীদের গণিত-জ্ঞান কিরূপ ছিল, এ-সম্পর্কে নিশ্চিত করে কিছু বলা যায় না। আবার Gordon Childe-এর এই মতও একেবারে উড়িয়ে দেওয়া যায় না যে, হয়তো সিন্ধুসভ্যতার যুগে তখনকার মানুষ এমন-কিছুতে লিখত যা সহজেই ধ্বংস হয়ে যায়। First Urbanization-এর অন্য দুটি কেন্দ্র– মিশর ও ব্যাবিলনের কথা বিবেচনা করে প্রত্নতাত্ত্বিকরা এই অভিমত পোষণ করছেন যে, সিন্ধুসভ্যতায় প্রাপ্ত বহু সীলে 'হিসাব' (Account) আছে। জমি জরীপ থেকে জ্যামিতি শাস্ত্রের উদ্ভব,—এই ধারণা পরিত্যক্ত হওয়ার অবস্থায় এসেছে। G. Childe বলেন,—"The theory that exact geometry arose out of land-surveying in Egypt and Babylonia is not supported by the evidence at our disposal."* তাঁর মতে জ্যামিতির উদ্ভবের উৎস খুঁজতে হবে এর techniques of mansons, architects and engineers-এর মধ্যে J. D. Bernal-এরও একই মত: "The practice in building in brick, particularly of large religious buildings of pyramid form, gave rise not only to geometry, but also to the conception of areas and volumes of figures and solids reckonable in terms of the lengths of their sides"**

বর্তমানে গবেষকরা 'অগ্নিচয়ন'-কে সিন্ধুসভ্যতার অবদান বলে মনে করছেন। কারণ, 'অগ্নিচয়ন' Brick-technology ছাড়া অনুধাবন বা বোঝা সম্ভব নয়। সুতরাং বৈদিক যুগের মানুষরা যে, সিন্ধুসভ্যতার সময়কার অনেক আচার-অনুষ্ঠান, বিজ্ঞান-প্রযুক্তি গ্রহণ করে থাকবে,—এমন অনুমান অযথার্থ নয়।

গণিতে সিন্ধুসভ্যতার প্রত্নতাত্ত্বিক নিদর্শন

সিন্ধুসভ্যতায় প্রাপ্ত নিদর্শন থেকে V. B. Mainkar ও M.N. Deshpande

* Man Makes Himself,—G. Childe, Page—20>-207

** Science in History,—J. D, Bernal, Page-121

যে গাণিতিক তথ্যাদি সংগ্রহ করেছেন, আমরা এখানে তার দু-একটি বিবরণ নিয়ে সামান্য আলোচনা করলাম। সিন্ধুসভ্যতায় নিম্নলিখিত গাণিতিক যন্ত্রপাতি উদ্ধার করা সম্ভব হয়েছে।*

1. মহেঞ্জোদড়োয় প্রাপ্ত সুন্দর একটি শঙ্খের মাপনী স্কেল যাতে 9টি বিভাগ আছে। এটি ম্যাকের গ্রন্থ (1938) থেকে জানা যায়।
2. হরপ্পায় প্রাপ্ত একটি ব্রোঞ্জের মাপনী স্কেল। এটি ভাট-এর রিপোর্টে (1953) থেকে জানা যায়।
3. লোথালে প্রাপ্ত একটি ছোট হাতীর দাঁতের স্কেল। এটি রাও-এর রিপোর্ট (1973) থেকে জানা যায়।
4. লোথালে প্রাপ্ত একটি অদ্ভুত ও সুন্দর বস্তু যা কোণ মাপার জন্য ব্যবহৃত হতো বলে অনুমান করা যায়।
5. বিভিন্ন আকারের টেরাকোটা *Plumb-bob* যার কোনটায় উল্লম্ব দণ্ড আছে, আবার কোনটায় নেই।
6. কালীবঙ্গান থেকে একটি অংশাঙ্কিত স্কেল পাওয়া গেছে যা মাপার কাজে লাগত।

উপরে উল্লিখিত তিন প্রকার স্কেলের সঙ্গে সিন্ধুসভ্যতায় প্রাপ্ত বিভিন্ন আকারের ইটের দৈর্ঘ্যের তুলনা করে **Mainkar** দেখিয়েছেন যে, ওইসব স্কেলে একই প্রকার পদ্ধতি ব্যবহৃত হয়েছে।** এই স্কেলের সঙ্গে শুল্বসূত্রে ব্যবহৃত ইটের সূক্ষ্ম পরিমাপের সম্পর্ক একেবারে অস্বীকার করা যায় না। এমন কি, কৌটিল্যের অর্থশাস্ত্র-এ ব্যবহৃত 'অঙ্গুল' এককেরও ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক দেখা যায়। **Mainkar** এই বিশ্লেষণ থেকে মন্তব্য করেছেন : **'It is, therefore, possible to assert that the Indus length-measures had a very profound influence on the length-measures used in India upto a few years back."*****

ওজন-এর (**weight**) কথা আলোচনা করলে একটি চমৎকৃত হবার মত তথ্য নজরে আসে : সিন্ধুসভ্যতার সুবিস্তারিত অঞ্চলে—500,000 বর্গমাইল জুড়ে প্রায় পাঁচ শ' বছর ধরে একই ধরনের ওজন পদ্ধতি প্রচলিত ছিল। এই ওজন পদ্ধতি অংশত দশমিক, আর অংশত দ্বিগুণোত্তর (**Binary**)। বিভিন্ন প্রকার ওজন বাটখারাগুলির মধ্যে **1 : 2 : 5** এই অনুপাত দেখা যায়। **Hemmy** ও **Rao**-এর ওজন তালিকা তুলনা করে **Mainkar** মন্তব্য করেছেন,—**"These two tables are formulated by the application of the same logical**

---

* M. N. Deshpande, IJHS, Vol VI No. 1, Page—10-11

** Frontiers of the Indus Civilization, Lal & Gupta, Page—147, 1984

*** Ibid, Page—147-178

principle as has been used 4000 years later in the progression of the denominations of weights of the metric system."*

এটা সবার জানা যে, সিন্ধুসভ্যতার প্রত্নতাত্ত্বিক নিদর্শন সমূহের মধ্যে জ্যোতির্বিজ্ঞান ও গণিত সম্বন্ধে লিখিত কোন প্রমাণ আমাদের হস্তগত হয়নি। সীলমোহরগুলিতে লিপির পাঠোদ্ধার করা সম্ভব না হলে নিশ্চিত করে কিছু বলাও সম্ভব নয়। তবুও প্রত্নতাত্ত্বিক, স্থপতি, গণিতজ্ঞ ও জ্যোতির্বিদরা একত্রে বাড়ীঘর, স্নানাগার, শষ্যাগার ইত্যাদি ও মৃৎপাত্র, সীলমোহরে অঙ্কিত চিত্র বা ডিজাইন থেকে হয়তো মূল্যবান গাণিতিক তথ্য সংগ্রহ করে ব্যাখ্যা-বিশ্লেষণে সক্ষম হবেন। এরকম একটি কাজের নমুনা **R. P. Kulkarni** সম্প্রতি করেছেন তাঁর ***Geometry Known to the People of Indus Civilization*** প্রবন্ধে।** হরপ্পা ও মহেঞ্জোদড়োয় প্রাপ্ত কিছু সীলমোহরে অঙ্কিত ডিজাইন ও ছবি থেকে তিনি নিম্নলিখিত **স্বীকার্য** ও **সম্পাদ্য** ওই সভ্যতায় প্রচলিত ছিল বলে অনুমান করেন। এখানে তার কয়েকটি উল্লেখ করা হলো।

স্বীকার্য

(a) বর্গ বা আয়তক্ষেত্রের কর্ণ বর্গ বা আয়তক্ষেত্রকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
(b) বর্গ বা আয়তক্ষেত্রের কর্ণ পরস্পর সমান।
(c) বর্গের বাহুর সমদ্বিখণ্ডকগুলি পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে।

সম্পাদ্য

(a) প্রদত্ত দৈর্ঘ্যকে সমান দুইভাগে বিভক্ত কর।
(b) প্রদত্ত দৈর্ঘ্যের রেখাকে যে-কোন সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত কর।
(c) প্রদত্ত বর্গ বা আয়তক্ষেত্রকে একই ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্র বা আয়তক্ষেত্রে পরিণত কর।
(d) পরস্পর সমান্তরাল দুইটি সরলরেখা অঙ্কন কর।

আমাদের কাছে কুলকার্ণির এই তথ্য তেমন বিশ্বাসযোগ্য বলে মনে হয় না। তবে এই গবেষণা বা অনুমান নতুন গবেষণার ক্ষেত্র সম্প্রসারিত করতে সাহায্য করবে, তাতে সন্দেহ নেই।

প্রাচীন ভারতীয় জ্যোতির্বিজ্ঞান ও গণিত সম্পর্কে নতুন দৃষ্টিভঙ্গী অবলম্বন করে গবেষণা করার নবতর অধ্যায় সূচিত হয়েছে। এই আলোকে প্রাচীন ভারতীয় গণিত ও জ্যোতির্বিজ্ঞানের নানা সমস্যা আলোচনা করার অবকাশ ও সুযোগ দেখা দিয়েছে। ভারত-গ্রীক সাংস্কৃতিক সম্পর্ক নিয়ে এতদিন যে-সব

* Ibid, Page—141
** R. P. Kulkarni, IJHS, 1978, vol.—XIII No. 2, Page—117-124

আলোচনা, তত্ত্ব ও তথ্যের সমাবেশ করা হয়েছে, সে-সবের যাচাই করার আর এক অভিনব পদ্ধতিও দেখা দিয়েছে যা অধ্যাপক দেবীপ্রসাদ চট্টোপাধ্যায় ***The Method of Retrospective Probing**** বলেছেন। ভারতের জ্যোতির্বৈজ্ঞানিক ও গাণিতিক উত্তরাধিকার বস্তুত অন্য কোন দেশ থেকে আত্মসাৎ করা কিনা, এ নিয়ে এখন তথ্যাভিত্তিক অনেক সংশয় দেখা দিচ্ছে। আশা করা যায়, অদূর ভবিষ্যতে আরো অধিক তথ্যের ভিত্তিতে সমস্যা সমাধানে নতুন আলোকপাত করা সম্ভব হবে।

*** History of Science and Technology in Ancient India, Page—225

নির্বাচিত গ্রন্থপঞ্জী

চক্রবর্তী, নীরদবরণ : **পাশ্চাত্য দর্শনের ইতিহাস** (প্লেটো-অ্যারিস্টটল), পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষৎ, ১৯৮০।

চট্টোপাধ্যায়, সতীশচন্দ্র : **ভারতীয় ও পাশ্চাত্য দর্শন**, কলকাতা বিশ্ববিদ্যালয়, ১৯৬৩।

চট্টোপাধ্যায়, সুনীতিকুমার : **বাংলা ভাষাতত্ত্বের ভূমিকা**, কলকাতা বিশ্ববিদ্যালয়, ১৯৭৪।

ঠাকুর, রবীন্দ্রনাথ : **বিচিত্রা**, বিশ্বভারতী গ্রন্থালয়, ১৩৬৮।

দাশগুপ্ত, সাধন : **ভাষা গণিত**, প্রত্যয় প্রকাশ, হাওড়া, ১৯৮১।

দাশগুপ্ত, ধীমান : **বিশ্ববিজ্ঞানের ইতিহাস**, বাণীশিল্প, ১৯৮১।

বর্মন, রেবতীমোহন : **সমাজ ও সভ্যতার ক্রমবিকাশ**, ন্যাশনাল বুক এজেন্সি প্রাঃ লিঃ, কলকাতা, ১৯৮৪

বসু, সত্যেন্দ্রনাথ : **সত্যেন্দ্রনাথ বসু রচনা সংকলন**, বঙ্গীয় বিজ্ঞান পরিষৎ, ১৩৮৭।

বাগচী, অশোককুমার : **চিকিৎসাশাস্ত্র যুগেযুগে**, পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষৎ, ১৯৮৪।

বিবেকানন্দ রচনা সংগ্রহ (১ম-৮ম খণ্ড), বইপত্র, কলকাতা।

ভট্টাচার্য, বিজনবিহারী : **বাগর্থ**, জিজ্ঞাসা, কলকাতা, (তৃতীয় সংস্করণ)।

মজুমদার, রমেশচন্দ্র : **প্রাচীন ভারতে বিজ্ঞানচর্চা**, বিশ্বভারতী, ১৩৬৩।

মজুমদার, গিরিজাপ্রসন্ন : **প্রাচীন ভারতে উদ্ভিদবিদ্যা**, বিশ্বভারতী, ১৩৫৩।

মজুমদার, প্রদীপকুমার : **প্রাচীন ভারতে গণিতচর্চা**, গ্রন্থমেলা, ১৩৮৬।

: **আমাদের দৃষ্টিতে গণিত**, পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষৎ, ১৯৮২।

: **বাস্তব সংখ্যা ও সংহতি তত্ত্ব**, পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষৎ, ১৯৮৪।

মাইতি, নন্দলাল : **প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিবৃত্ত**, ফার্মা কেএলএম প্রা. লি., ১৯৮৩।

: **গণিতের ললিত পাঠ**, প্রোগ্রেসিভ বুক ফোরাম, ১৯৮১।

: ভারতের অমর গণিতাচার্য, মণ্ডল অ্যাণ্ড সন্স, ১৯৮৫।

রায়, নীহাররঞ্জন : বাঙালীর ইতিহাস (সংক্ষিপ্ত), লেখক সমবায় সমিতি, কলকাতা, ১৩৭৩।

রায়, ইন্দ্রকুমার : প্রতীকী ন্যায়, পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষৎ, ১৯৭৭।

লাহিড়ী, রেবতীমোহন : প্রাচীন গ্রীসের ইতিহাস, পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষৎ, ১৯৭৬।

সরকার, দীনেশচন্দ্র : সাংস্কৃতিক ইতিহাসের প্রসঙ্গ, সাহিত্যলোক, ১৩৮৯।

সেন, সমরেন্দ্রনাথ : বিজ্ঞানের ইতিহাস, ইণ্ডিয়ান অ্যাসোসিয়েশন ফর দি কালটিভেশন অফ সায়েন্স, ১৯৬২।

হরফ প্রকাশনী : ঋগ্বেদ সংহিতা, দ্বিতীয় খণ্ড, ১৯৭৬।

হ্যালডেন, জে. বি. এস., : মার্কসীয় দর্শন, চিরায়ত প্রকাশন, কলকাতা, ১৯৮৬।

অগ্রবাল, বাসুদেবশরণ : পাণিনিকালীন হিন্দী ভারতবর্ষ, চৌখাম্বা বিদ্যাভবন, ১৯৬৯।

দ্বিবেদী, সুধাকর : গণিত কা ইতিহাস, বারাণসী, ১৯১০।

ব্রজমোহন : গণিত কা ইতিহাস, হিন্দী সমিতি, সূচনা বিভাগ, উত্তরপ্রদেশ, লক্ষ্ণৌ, ১৯৬৫।

: গণিতীয় কোষ, চৌখাম্বা, সংস্কৃত সিরিজ, ১৯৫৪।

পত্র-পত্রিকা : প্রবন্ধ

দত্ত, বিভূতিভূষণ :

(ক) জ্যামিতি-শাস্ত্রের প্রাচীন হিন্দু নাম ও তাহার প্রসার, **সাহিত্য পরিষৎ পত্রিকা**, ৩৭ বর্ষ, ১ম সংখ্যা, পৃ—১-৬।

(খ) আচার্য আর্যভট ও ভূভ্রমণবাদ, **সাহিত্য পরিষৎ পত্রিকা**, ৪২ বর্ষ, ৪র্থ সংখ্যা, পৃ—১৬৭-১৮৩।

(গ) মহাভারতে স্থানীয়মানতত্ত্ব, **সাহিত্য পরিষৎ পত্রিকা**, ৪৩ বর্ষ, ৪র্থ সংখ্যা, পৃ—১৬১-১৬২।

(ঘ) দশাঙ্ক সংখ্যা প্রণালীর উদ্ভাবন, **সাহিত্য পরিষৎ পত্রিকা**, ৪৬ বর্ষ, ৩য় সংখ্যা, ২০৭-২২৭।

দাসগুপ্ত রমেশচন্দ্র ঃ
(ক) ভারতীয় জ্যোতিষে বৈজ্ঞানিক তত্ত্বের আবিষ্কার, **সাহিত্য পরিষৎ পত্রিকা** ৬২ বর্ষ, ৩য় সংখ্যা, পৃ—১৬৭-১৭৩।

ভট্টাচার্য, মেঘনাদ ঃ
জয়পুরের জ্যোতির্ষিক যন্ত্রালয়, ১২-১৩ বর্ষ, **সাহিত্য পরিষৎ পত্রিকা**, ২-৩ সংখ্যা।

সেনগুপ্ত, যোগেন্দ্রকুমার ঃ
(ক) ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধ, **সাহিত্য পরিষৎ পত্রিকা**, ২৩ বর্ষ, ১ম সংখ্যা, ১-১৪।
(খ) ইউক্লিডের প্রথম স্বীকার্য, **সাহিত্য পরিষৎ পত্রিকা**, ২৩ বর্ষ, ২য় সংখ্যা, ১২৩-১৩৮।
(গ) দশম স্বতঃসিদ্ধ, **সাহিত্য পরিষৎ পত্রিকা**, ২৩ বর্ষ, ৪র্থ সংখ্যা, ২৬৩-২৮১।
(ঘ) ইউক্লিডের দ্বিতীয় স্বীকার্য, **সাহিত্য পরিষৎ পত্রিকা**, ২৪ বর্ষ, ১ম সংখ্যা, পৃ—১-২০।

চট্টোপাধ্যায়, অসীমা ঃ
সুশ্রুতের আকুপাংচার, **আনন্দবাজার পত্রিকা**, ১২ই জুন, ১৯৮৩।

মজুমদার, প্রদীপকুমার ঃ
(ক) 400 খ্রীস্টাব্দ থেকে 600 খ্রীস্টাব্দ পর্যন্ত গণিতশাস্ত্রের উল্লেখযোগ্য ঘটনা, **গণিত জগৎ**, ফেব্রুয়ারী-জানুয়ারী, 1976-1977।
(খ) সমাজ ও গণিত, **গণিতজগৎ**, ফেব্রুয়ারী-জানুয়ারী, 1976-77।
(গ) আর্কিমিডিসের প্রকৃত নাম, **গণিতবার্তা**, জানুয়ারী-জুন, 1978।

মাইতি, নন্দলাল ঃ
(ক) একটি অবিস্মরণীয় পাঠ্যপুস্তক, **জ্ঞান ও বিজ্ঞান**, নভেম্বর, ১৯৭৯।
(খ) ইউক্লিডের পর, **বিজ্ঞান প্রদীপ**, মার্চ, ১৯৮১।
(গ) বিদ্যাকল্পদ্রুম কৃষ্ণমোহন বন্দ্যোপাধ্যায়, **জ্ঞান বিচিত্রা**, আগস্ট, ১৯৮২।
(ঘ) অসীমের রহস্য সন্ধানে, **জ্ঞান বিচিত্রা**, অক্টোবর, ১৯৮২।
(ঙ) কোণের ত্রিখণ্ডীকরণ অসম্ভব কেন ? **জ্ঞান ও বিজ্ঞান** জুলাই-আগস্ট ১৯৮৪।
(চ) আর্কিমিডিসের গোবাদি সমস্যা, **গণিতচর্চা**।

ইংরেজী

Ball, W, W. R. : *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover Publications., Inc, New York, 1960.

Banerjee, G. N. : *Hellenism in Ancient India*, New Delhi, 1961.

Banerjee, R. D. : *Prehistoric, Ancient and Hindu India*, Nag Publishers, New Delhi.

Bell, E. T. : *Men of Mathematics*, Simon & Schauster, 1965.

: *The Development of Mathematics*, New York, 1940.

Berry, A. : *A Short History of Astronomy*, Dover Publications, Inc., New York, 1961.

Bose et al : *A Concise History of Science in India*, INSA. 1977.

Bonnerjee, G. : *Dictionary of Foreign Words in Bengali*, C. U., 1968.

Boyer, C. B. : *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, 1968.

: *The History of Calculus*, Dover Publications., Inc., New York, 1959.

Bronowski, J. : *The Ascend of Man*, B B C, London.

Bunt, Jones & Bedient : *The Historical Roots of Elementary Mathematics*, Prentice Hall Inc., 1976.

Bury, : *A History of Greece*, Penguin.

Cajori, F. : *A History of Mathematics*. 1893 edition.

Campbell, N. : *What is Science ?* Dover Publications., Inc., New York, 1953.

Cassirer, E. : *Substance And Function and Einstein Theory of Relativity*, Dover Publications., Inc , New York, 1953.

Chatterjee, D. P. : *History of Science in India*, vols-I & II, Editorial Enterprises, New Delhi, 1982.

: *History of Science and Technology in Ancient India*, Firma KLM Pvt. Ltd., 1986.

Chatterjee, S. K. : *India and Ethiopia From the Seventh Century B.C.*, Asiatic Society, 1968.

: *Iranianism*, Asiatic Society, 1972.

: *Balts and Aryans*, I I A S, Simla.

Chakravarti, K. R. : *Science Based on Symmetry*, Firma KLM Private Limited, 1977.

Chakroborty, A. K. : *Origin and Development of Indian Calendrical Science*, Indian Studies : Past & Present, 1975.

Chapekar, N. M. : *Ancient India and Greece*, Ajanta Publications, New Delhi, 1977.

Childe, V. G. : *Man Makes Himself*, New American Library, 1951.

: *What happend in History ?* Penguin.

Clagett, M. : *Greek Science in Antiquity*, Abelard Schuman, 1955.

Colerus, E. : *Mathematics For Everyman*, Emerson Books, New York. 1958.

Courant, R. & Robbins, H : *What is Mathematics ?* Oxford University Press, New York, 1980.

Cumont, F. : *Astrology and Religion Among the Greeks and Romans*, Dover Publications., Inc., New York, 1960.

Daintith, J. (edited) : *Dictionary of Mathematics*, International Book Productions Ltd., 1982.

Dantzig, T. : *The Bequest of Greek Mathematics*, Macmillan Company, New York, 1955.

Dampier, W. C. : *A History of Science*, Cambridge, 1948.

Dörrie, H. : *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover Publications., Inc., 1965.

Engles, F. : *The origin of The Family, Private Property and the State*, Progress Publishers, Moscow, 1983.

: *Anti-Dühring*, Progress Publishers, Moscow, 1978.

Farrington, B. : *Greek Science*, Penguin, 1949.

: *Science in Antiquity*, Home Service Library, London, 1936.

Gardner, M. : *Mathematical Carnival*, Penguin, 1979.

Gibbons, E. : *The History of the Decline and Fall cf Roman Empire*, London.

Gode, P. K. : *Studies in Indian Cultural History*, V.V.R.I, 1961.

Gow, J. : *A Short History of Greek Mathematics*, Cambridge, 1884.

Haywood, M. : *Ancient India and Near East.*

Heath, T. L. : *A Manual of Greek Mathematics*, Dover Publications., Inc., New York, 1963.

: *A History of Greek Mathematics*, vols—(I and II), Oxford University Press, 1921.

: *Diophantus of Alexandria*, Dover Publications., Inc., New York, 1964.

: *The thirteen Books of Euclid's Elements*, vols—(I+II+III), Dover Publications., Inc., New York, 1956.

: *The Works of Archimedes*, Dover Publications., Ins., New York, 1953.

: *Apollonius of Perga*, Cambridge, 1896.

Hintikka, J. (ed) : *The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, 1969.

Hogben, L. : *Mathematics for the Million*, George Allen and Unwin Ltd., 1945.

Ivins (Jr.), W.M : *Art and Geometry*, Dover Publications., Inc., New York, 1964.

Jariazbhoy, R. A. : *Foreign Influence in India*, Bombay, 1963.

Jeans, J. : *The Growth of Physical Science*, Cambridge, 1947.

Kapur, J. N. : *Thoughts on Nature of Mathematics*, Atmaram & Sons, New Delhi, 1973.

Kasner & Newman : *Mathematics and the Imagination*, G. Bell & Sons, London, 1950.

Kaye, G. R. : *Astronomical Observatories of Jai Singh*, ASI, New Delhi, 1982.

Kline, M. : *Mathematics in Western Culture*, Penguin, 1972.

: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1977.

Kosambi, D. D. : *The Culture and Civilisation of Ancient India in Historical Outline*, Vikas Publishing House Pvt. Ltd. 1982.

Lenin, V. I. : *Materialism and Empirio-criticism*, Progress Publishers, Moscow. 1977.

Macdonell, A. : *History of Sanskrit Literature*, Motilal Banarsidass, New Delhi, 1979.

Mazumdar, R. C. : (*The*) *Classical Account of India*, Firma KLM Private Limited, 1977.

Milner, Thomas : *History of Astronomical Discoveries*, Oriental Publishers, New Delhi, 1975.

Nagchaudhuri, B. D. : *Technology and Society*, IIAS, Simla, 1979.

Neugebauer, O. : *The Exact Sciences in Antiquity*, Harper & Row, New York, 1962.

O' Leary, De Lacy : *How Greek Science Passed to the Arabs*, Routlege and Kegan Paul, London, 1948-49.

Poincaré, H. : *Science and Hypothesis*, Dover Publications., Inc., New York, 1952.

Plutarch : (*The*) *Lives of the Noble Grecian and Romans*.

Publication Division : *Scientists*.

Puri, B. N. : *India As Described by Early Greek Writing*.

Rapson, E. J. (ed.) : *The Cambridge History of India*, Vol-I, S. Chand & Co., New Delhi, 1962.

Roberts, J. M. : *The History of the World*, Penguin.

Richardson, M. : *Fundamental of Mathematics*, Macmillan Company, New Ycrk, 1966.

Rose, H.& S. : *Science and Society*, Penguin, 1975.

Russell, Bertrand : *Introduction to Mathematical Philosophy*, Simon and Schuster, New York.

Sankalia, H. D. : *Some Aspects of Prehistoric Technology in India*, INSA, New Delhi.

Sarton, G. : *Introduction to History of Science*, vol—I.

Schefold, Karl : Classical Greece.

Seal, B. N. : *The Positive Sciences of the Ancient Hindus*, Motilal Banarsidass, New Delhi, 1958.

Sen, S.N. & Shukla, K.S. : *History of Astronomy in India*, INSA, New Delhi.

Shastri, A. Mitra : *India as Seen in the Bṛhatsaṁhitā of Varāhamihira*, Motilal Banarsidass, New Delhi, 1969.

Singer, C. : *From Magic to Science*, London, 1928.

Smith, D. E. : *History of Mathematics*, vols (I+II), Dover Publications., Inc., New York, 1958.

Struik, D. J. : *A concise History of Mathematics*, Dover Publications., Inc., New York, 1967.

Tarn, W. W. : *The Greeks in Bacteria and India*, Cambridge, 1938.

: *Hellenistic Civilization*, London, 1927.

Thucydides : *History of Peloponnesian War*, Penguin.

Weber, A. : *History of Indian Literature*, 1974.

Wells, H. G. : *A Short History of the World*, Penguin.

Winternitz, M. : *History of Indian Literature*, vol-I, C U.

: Vol III, Motilal Banarsidass, New Delhi.

A few more books and Journals

Republic, Book—VI-VII, translation with introduction and notes, O. U. P.

Darwin's Life and Letters.

Einstein and the Philosophical problems of 20th-century Physics—Progress Publishers, Moscow, 1983

Glories of India—P. K. Acharya, Allahabad.

Indian Journal of History of Science

Indian Historical Quarterly

Journal of Asiatic Society of Bengal

Indian Journal of Mathematics Teaching

নির্দেশনা

হ

নন্দলাল মাইতি অভিজ্ঞ গণিত শিক্ষক ও বাংলা ভাষায় জনপ্রিয় গণিতের অন্যতম প্রধান লেখক। তিনি যেমন কিশোরদের জন্য লেখেন, তেমনি সাধারণ পাঠকদের জন্যও তাঁর রচনার সংখ্যা কম নয়। তাঁর গবেষণামূলক লেখারও অভাব নেই, বিশেষত গণিত শিক্ষণ পদ্ধতি ও মননশীল প্রবন্ধে। শ্রীমাইতি বিজ্ঞান চেতনা প্রসারে অনেক বিজ্ঞান সংস্থার সহিত যুক্ত; Indian Association for the Improvement of Mathematics Teaching-এর আজীবন সদস্য। এ যাবৎ শ্রীমাইতির ইংরেজী ও বাংলায় প্রকাশিত প্রবন্ধের সংখ্যা প্রায় দেড়শ'।

ইতিমধ্যে লেখকের 'প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিবৃত্ত' বইটি বহু বিদ্বজ্জনের প্রশংসা অর্জন করেছে।

প্রাচীন ইতিহাস, প্রত্নতত্ত্ব, ধর্ম, দর্শন ও সাহিত্যে লেখকের গভীর আগ্রহ ও অধ্যয়ন তাঁর প্রতিটি গ্রন্থেই লক্ষ করার মত। ফলত, তাঁর গ্রন্থ ইঙ্গিত-পূর্ণ ও তাৎপর্যময় হয়ে ওঠে এবং পাঠককে বহু নতুন ক্ষেত্রের অনুসন্ধানে ইঙ্গিত দেয় ও উদ্দীপ্ত করে।

প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিবৃত্ত

বিজ্ঞানের ইতিহাস রচয়িতার প্রধান কাজ বিজ্ঞানের বিকাশের প্রেক্ষাপটটি পাঠকদের সামনে উপস্থাপিত করা। বিজ্ঞানের ইতিহাস দর্শন ও সমাজের ইতিহাসের সঙ্গে ওতোপ্রোতভাবে মিশে থাকে। এই সামগ্রিক ইতিহাস-চেতনা না থাকলে বিজ্ঞানের ইতিহাস অসংলগ্ন তথ্যপুঞ্জের ভিত্তিহীন সমাবেশ হয়ে ওঠে। 'গ্রীক গণিতের সংক্ষিপ্ত ইতিহাস' রচনাকালে শ্রীনন্দলাল মাইতি সে-সম্পর্কে সম্পূর্ণ সচেতন ছিলেন। বিষয়বস্তুর উপস্থাপনাতেই যে তিনি মুনশীয়ানা দেখিয়েছেন তা নয়, তাঁর ভাষার প্রসাদগুণে ইতিহাসের নীরস তথ্যও সরস এবং উপভোগ্য হয়ে উঠেছে। আলোচ্য বিষয়ে গ্রন্থকার শ্রী মাইতির বিপুল অধ্যয়নের সাক্ষ্য ছড়িয়ে আছে বইটির পাতায় পাতায়, যদিও লেখকের পাণ্ডিত্য আগ্রহী পাঠকের সামনে দুর্লঙ্ঘ্য পাঁচিল হয়ে দাঁড়ায় নি। কেবল গ্রীক গণিতের বিকাশের ধারাটি অনুধাবনের ক্ষেত্রেই নয়, গ্রীক-মণীষার সামগ্রিক মূল্যায়নের ক্ষেত্রেও বইটি অত্যন্ত মূল্যবান। পরিশিষ্টে ভারতীয় গণিতের সঙ্গে গ্রীক গণিতের তুলনামূলক আলোচনা আগ্রহী পাঠকদের কাছে বইটির উপযোগিতা বাড়িয়েছে। বাংলাভাষায় এজাতের বই এর আগে লেখা হয়েছে বলে আমার জানা নেই। শ্রী মাইতির এই সফল প্রয়াসকে অকুণ্ঠ অভিনন্দন জানাচ্ছি এবং বইটির বহুল প্রচার কামনা করছি।

অজয় চক্রবর্তী
রিডার,
ফলিত পদার্থবিজ্ঞান বিভাগ,
কলকাতা বিশ্ববিদ্যালয়

প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিবৃত্ত

"In ensuing years many other important materials have been discovered and published. We are yet to have a complete treatise incorporating all these. Credit goes to Maiti in reporting some of these materials. ... Language of the book is lucid and well meaning..." S. K. Sen, *Science Reporter*, March, 1984

"বইটিতে বিশেষ পরিশ্রমে প্রাচীন গণিতের অনেক তথ্য দেওয়া হয়েছে। ভারতের প্রাচীন গণিতের আগ্রহীরা এবং গণিতের শিক্ষক ও গবেষকরা এসব তথ্যে উপকৃত হবেন। ভবিষ্যতে গণিতের প্রকৃত ইতিহাস লেখায়ও এসব তথ্য বিশেষ সাহায্য করবে।"

অধ্যাপক মহাদেব দত্ত, জ্ঞান ও বিজ্ঞান, মার্চ ১৯৮৪